

Optimierung der Risiko-/Ertrags-Struktur des Gesamtbank-Portfolios

Dr. Ursula-A. Theiler,

Risk Training, Carl-Zeiss-Str. 11, D-83052 Bruckmühl

<http://www.ursula-theiler.de>

e-mail:theiler@risk-training.org,

Tel.: +49 - (0) 80 62 - 80 55 45

Zusammenfassung.

In einem sich verschärfenden Wettbewerb sind Banken gezwungen, Rentabilitäts- und Risikomanagement enger miteinander zu verzahnen und die Risiko-/Ertrags-Struktur des Gesamtbank-Portfolios effizient zu steuern. Ein erfolgreiches integriertes Risiko-/Ertrags-Management wird zu einem entscheidenden Wettbewerbsvorteil. Die Fähigkeit, die bankweiten Risiken rentabilitätsorientiert zu steuern, stellt damit auch einen wesentlichen Einflussfaktor auf die Bonität und das Rating der Bank dar.

In diesem Beitrag wird ein Überblick über einen Optimierungsansatz gegeben, der Risk-/Return-optimale Gesamtbankportfolios berechnet und damit entscheidungsrelevante Informationen zur Risiko-/Ertrags-effizienten Gesamtbanksteuerung liefert. Die erwarteten Gesamtbank-Gewinne werden maximiert und dabei die Verlustrisiken gleichzeitig aus interner und aus aufsichtrechtlicher Sicht begrenzt. Das Optimierungsmodell basiert auf dem neuen Risikomaß des Conditional Value at Risk, das eine integrierte Betrachtung aller Bankrisiken erlaubt und aus mathematischer Sicht die Lösbarkeit der betrachteten Portfolio-Optimierungsaufgabe sichert.

Stichworte:

Basel I, Basel II, Conditional Value at Risk, Downside Risikomaße, Integrierte Gesamtbanksteuerung, Kohärenz, Ökonomisches Kapital, Regulatorisches Kapital, Return on Risk Adjusted Capital (RORAC).

1 Ausgangssituation

Das Umfeld der Banken ist geprägt durch einen sich verschärfenden Wettbewerb, der zu sinkenden Ergebnismargen im Bankgeschäft führt. Gleichzeitig sehen sich die Banken steigenden Risiken ausgesetzt, die aus einer zunehmenden Komplexität der gehandelten Finanzinstrumente sowie steigenden Volatilitäten und zunehmenden Verflechtungen der Finanzmärkte resultieren. So wird es für die Banken überlebensnotwendig, Rentabilitäts- und Risikomanagement enger miteinander zu verzahnen und das Gesamtbank-Portfolio Risiko-/Ertrags-orientiert zu steuern. Ein erfolgreiches integriertes Risiko-/Ertrags-Management stellt einen entscheidenden Wettbewerbsvorteil und damit auch einen wesentlichen Einflussfaktor auf die Bonität und das Rating der Banken dar.

Ziel dieses Beitrags ist es, einen Überblick über einen Optimierungsansatz zu geben, der die Risiko-/Ertrags-Struktur des Gesamtbank-Portfolios optimiert, indem der erwartete Return maxi-

miert wird und dabei die Verlustrisiken gleichzeitig aus interner und aus aufsichtrechtlicher Sicht begrenzt werden. Aus interner Sicht werden dabei die Risiken mittels bankeigener Verfahren quantifiziert und durch das vorhandene ökonomische Kapital begrenzt. Aus regulatorischer Sicht werden die Verlustrisiken nach den Regeln des Grundsatz I gemessen¹ und durch das zur Verfügung stehende regulatorische Kapital begrenzt.² Das Optimierungsmodell weist die folgende Grundstruktur auf:

(P)	Maximierung des erwarteten Gesamtbank-Return	(1-1)
	unter den Nebenbedingungen	
NB 1	Nach internen Verfahren gemessenes Verlustrisiko \leq Risikotragfähigkeitsgrenze (Ökonomisches Kapital),	
NB 2	2a)	Nach aufsichtsrechtlichen Regeln gemessenes Verlustrisiko \leq Aufsichtsrechtliches Eigenkapital (Grundsatz I-Regeln),
	2b)	Kapitalstrukturbegrenzungen für das aufsichtsrechtliche Kapital, (§ 10 KWG),
NB 3	Volumenbegrenzungen.	

Zur Darstellung des Optimierungsansatzes wird wie folgt vorgegangen. Im Kapitel 2 wird das Optimierungsmodell dargestellt. Um aus der Risk-/Return-Optimierung entscheidungsrelevante Steuerungsinformationen für die Gesamtbanksteuerung erhalten zu können, wird im Kapitel 2.1 ein geeignetes Risikomaß für das Gesamtbankportfolio bestimmt, das konsistente und verlässliche Risikokennzahlen generiert. Anschließend wird im Kapitel 2.2 das grundlegende Optimierungsmodell formuliert, das den erwarteten Gesamtbank-Return maximiert, dabei eine Obergrenze für das interne Verlustrisiko, dessen Quantifizierung auf dem zuvor festgelegten Risikomaß basiert, einhält (NB 1) und nur zulässige Portfolios betrachtet (NB 3). Im Kapitel 2.3 wird skizziert, wie dieses Grundmodell zu einem Optimierungsmodell für das Gesamtbank-Portfolio erweitert werden kann, indem zusätzlich die aufsichtsrechtlichen Kapitalstruktur- und Risikobegrenzungsregeln (NB 2) berücksichtigt werden. Im Kapitel 3 wird ein Anwendungsbeispiel zum Einsatz des Optimierungsmodells gegeben. Der Beitrag schließt mit dem einem Fazit im Kapitel 4.

2 Optimierungmodell zur Risiko-/Ertragsoptimierung des Gesamtbank-Portfolios

2.1 Definition des internen Risikomaßes für das Gesamtbankportfolio

Bankweite Verlustrisiken weisen gegenüber den bislang im Vordergrund der bankinternen Risikomodellierung stehenden Marktpreisrisiken zahlreiche Besonderheiten auf.³ Ein grundlegender Unterschied besteht in der Form der resultierenden Verlustverteilungen. Gegenüber den Markt-

¹ Siehe Grundsatz I, BAKred (1997).

² Siehe § 10 KWG, Deutsche Bundesbank (1997).

³ Für eine Gegenüberstellung siehe z. B. Theiler (2002), S. 20 ff.

preisrisiken, für die typischerweise normalverteilte Verluste angenommen werden, kann im Bankportfolio nicht von einer symmetrischen Verteilung der Verluste ausgegangen werden. Zudem können sogenannte ‚fat tails‘ vorkommen, d.h. auch große Verluste können mit relativ hoher Wahrscheinlichkeit eintreten. In der Finanztheorie traditionell verwendete Risikokennzahlen, wie z. B. die Standardabweichung oder auch der Value at Risk, können in diesem Kontext zu falschen Steuerungsinformationen führen und sind zur Risikosteuerung auf Bankebene als wenig geeignet einzustufen.⁴ Zur Festlegung eines geeigneten Risikomaßes zur internen Risikomessung im Bankportfolio werden deshalb zunächst *Anforderungen* formuliert, die ein geeignetes Risikomaß für das Gesamtbankportfolio erfüllen sollte. Anschließend werden alternative finanzwirtschaftliche Risikokennzahlen daraufhin untersucht, inwieweit sie diesen Anforderungen genügen. Aus den Ergebnissen wird dann ein geeignetes Risikomaß bestimmt.

1. Als grundlegendes Unternehmensziel der Banksteuerung wird allgemein eine Maximierung des Unternehmenserfolges angesehen.⁵ Bei der Verfolgung dieses übergeordneten Unternehmensziels bestehen weitere begrenzende Unternehmensziele. Aus Risikosicht ist hierbei die gleichzeitige Einhaltung eines eigenen Bonitäts- und Sicherheitsziels der Bank entscheidend.⁶ In ihrer Risikopolitik muss die Bank bestimmte Risikoobergrenzen einhalten, um die Gefahr zu hoher Verlustrealisierungen zu vermeiden, die eine Verschlechterung der eigenen Bonität, damit verbunden eventuelle Rating-Herabstufungen und steigende Refinanzierungskosten, bis hin zur Insolvenz zur Folge haben können. Verlustrisiken sind in der Form zu begrenzen, dass ein geplantes Erfolgsziel nicht zu weit unterschritten wird.⁷ In dem Optimierungsmodell soll das Verlustrisiko in Übereinstimmung mit dieser Auffassung von Risiko modelliert werden.
2. Das Risikomaß soll außerdem die Risikoeinstellung des Managements berücksichtigen, die häufig durch das *Konfidenzniveau* der internen Risikomessung ausgedrückt und mit der angenommenen Insolvenzwahrscheinlichkeit des Unternehmens in Verbindung gebracht wird.
3. Im Bankportfolio treten verschiedene Risiken auf. Als wichtige Risikoarten seien Kredit-, Marktpreis- und operationelle Risiken genannt.⁸ Das Risikomaß soll es ermöglichen, Risiken unabhängig von einer besonderen Verteilung der auftretenden Verlustrisiken zu messen, und *damit insbesondere eine bankweite integrierte Risikomessung aller Risikoarten erlauben*.
4. Mit dem Konzept der kohärenten Risikomaße haben Artzner et al. ein axiomatisches Regelwerk geschaffen, das Eigenschaften geeigneter Risikomaße aus Sicht eines Aufsehers⁹ be-

⁴ Als wegweisende Arbeit zu dieser Thematik siehe Artzner et al. (1999).

⁵ Siehe z.B. Süchting (1992), S. 313 ff.

⁶ Vgl. z. B. Meyer zu Selhausen (2000), S. 40 ff.

⁷ Dies entspricht auch der betriebswirtschaftlichen Risikodefinition, die Risiko als die Gefahr negativer Abweichungen des realisierten von einem erwarteten Ergebnis definiert. Vgl. z.B. Büschgen (1998), S. 865, Jorion (2000), S. 81 oder Rockafellar et al. (2002), S. 2.

⁸ Zur weiteren Systematisierung siehe z. B. Büschgen (1998), S. 870.

⁹ Der Begriff des Aufsehers („supervisors“) wird dabei stellvertretend für eine beliebige Institution verwendet, welche die Risikokontrolle für das betrachtete Portfolio inne hat, beispielsweise kann hiermit ein Aufsichtsrat, eine Börsenaufsicht oder ein Regulator im aufsichtsrechtlichen Sinn gemeint sein. Siehe Artzner et al. (1999).

schreibt.¹⁰ Das Risikomaß sollte *eine Unterscheidung risikomäßig akzeptabler und risikomäßig nicht mehr akzeptabler Portfolios erlauben*. Jedes Risikomaß, das die Axiome der Kohärenz erfüllt, d.h. die Subadditivität, Homogenität, Monotonie und Translationsinvarianz, ist im Sinne von Artzner et al. als ein geeignetes Risikomaß anzusehen.

Artzner et al. definieren in diesem Zusammenhang Verlust als negative Wertrealisierungen ‚-X‘ eines zufälligen, in Geldeinheiten gemessenen Returns ‚X‘. Gemäß der obigen Anforderung Nr. 1 soll als Verlustrisiko jedoch die negative Abweichung eines unsicheren Werts von einem erwarteten Wert gemessen werden. Rockafellar et al. haben in diese Zusammenhang das Konzept der kohärenten Risikomaße zu dem Konzept der kohärenten Abweichungsmaße, der ‚*coherent deviation measures*‘, erweitert, einer parallelen Klasse von Funktionalen, die entsteht, wenn Risikomaße auf die Abweichungen ‚X-E[X]‘ anstelle auf negative Werte ‚-X‘ angewendet werden, wobei E[X] den Erwartungswert der zufälligen Wertgröße X darstellt.¹¹ Das Risikomaß des Optimierungsmodells soll den *Axiomen eines kohärenten Abweichungsmaßes im Sinne von Rockafellar et al. entsprechen*.

5. Zur Unterstützung eines effizienten Risk-/Return-Managements soll das Risikomaß die Bestimmung Risiko-/Ertrags-optimaler Portfolios mit vertretbarem Rechenaufwand erlauben und sich rechnerisch einfach umsetzen lassen.¹²
6. Die Erwartungsnutzentheorie liefert allgemein anerkannte Präferenzordnungen für alternative Portfolios. Das Risikomaß, auf dem die Risiko-/Ertragsoptimierung basiert, soll rationale Risikomanagement-Entscheidungen liefern. Daher wird gefordert, dass die Verwendung des Risikomaßes einen Einklang mit einer Erwartungsnutzenmaximierung risikoaverser Investoren herstellen soll.¹³
7. Zudem soll das Risikomaß praktikabel und vermittelbar sein, um in der Praxis erfolgreich eingesetzt werden zu können.

Im folgenden werden alternative Risikokennzahlen hinsichtlich dieser Anforderungen untersucht. Es werden die Varianz und andere höhere zentrale Momente, sowie als Vertreter der einseitigen Downside-Risikomaße die Lower Partial Moments und quantilsabhängige Risikomaße betrachtet.¹⁴

Im Hinblick auf die erste Anforderung kann festgestellt werden, dass Risikomaße, die auf dem zentralen Moment basieren, wie die Varianz und andere höhere zentrale Momente, Risiken um den Erwartungswert der Verteilung messen. Da sie *nicht* auf die im Verteilungsende auftretenden Risiken fokussiert sind, erfüllen sie die Anforderung 1 nicht und werden daher von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen. Bezüglich der Downside-Risikomaße, welche Risiken im Vertei-

¹⁰ Vgl. hierzu und zum folgenden Artzner et al. (1999).

¹¹ Vgl. Rockafellar et al. (2002), S. 2.

¹² Siehe Theiler (2002), S. 58.

¹³ “We say that a risk measure is consistent with expected utility maximization when it provides the same ranking of portfolios as expected utility maximization does.” Yoshida/Yamai (2001b), S. 3.

¹⁴ Zur Definition der verschiedenen Risikokennzahlen siehe z.B. Poddig (2000), S. 121 ff.

lungsende messen, lässt sich feststellen, dass die Lower Partial Moments (LPM) das Risiko im Zusammenhang mit der Unterschreitung einer fest vorgegebenen Zielrendite betrachten. Da hierbei kein fest vorgegebenes Konfidenzniveau berücksichtigt wird, erfüllen die LPM nicht die Anforderung 2 und werden daher für eine bankweite Risikomessung nicht in Betracht gezogen.¹⁵

Im folgenden werden die quantilsbasierten Risikomaße Value at Risk (VaR) und Conditional Value at Risk (CVaR) untersucht. Entsprechend der Anforderung 1 wird Verlust $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ als die negative Abweichung des zufälligen von dem erwarteten Portfoliowert zum Prognosehorizont definiert. Es wird die folgende formale Darstellung gewählt. Sei $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n)'$ der Vektor der einzelnen Assets des Bankportfolios und $\mathbf{y}=(y_1, \dots, y_n)'$ der Vektor der zugehörigen Marktpreise. Der Portfolioverlust $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ wird definiert als die Differenz des zufälligen von dem erwarteten Portfoliowert zum Prognosehorizont:¹⁶

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = E[\mathbf{y}]' \mathbf{x} - \mathbf{y}' \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n E[y_i] x_i - y_i x_i . \quad (2-1)$$

Entsprechend der Anforderung 1 soll das Risikomaß, das im Optimierungsmodell angewendet wird, große Abweichungen, d.h. extreme Verluste im Verteilungsende dieser Verlustverteilung quantifizieren. Allgemein misst der *Value at Risk* Verluste, die zu einem vorgegebenen Prognosehorizont mit einer vorgegebenen Konfidenzwahrscheinlichkeit α nicht überschritten werden und ist damit gleich dem α -Quantil der entsprechenden Verlustverteilung.¹⁷ Gemäß der Anforderung 4 und dem Konzept der Abweichungsmaße von Rockafellar et al. entsprechend wird die *Value at Risk Deviation* $VaR_\alpha(L(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ als das α -Quantil der Verteilung des Portfolioverlustes $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ aus der Gleichung (2-1) definiert:

$$VaR_\alpha(L(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = \inf\{z \in \mathfrak{R} \mid P(L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq z) \geq \alpha\} . \quad (2-2)$$

Neben dem Value at Risk wird der *Conditional Value at Risk* (CVaR) betrachtet, der in der Literatur auch als Expected Shortfall bezeichnet wird.¹⁸ Der CVaR ist ein bedingter Erwartungswert, der dem erwarteten Verlust im Verteilungsende jenseits des Value at Risk entspricht und damit die Frage beantwortet, *welcher Verlust zu erwarten ist, wenn der Extremfall eintritt, dass der Value at Risk überschritten wird*. Im Sinne der kohärenten Abweichungsmaße wird die *Conditional Value at Risk Deviation* $CVaR_\alpha(L(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ als der bedingte erwartete Portfolioverlust jenseits des Value at Risk des Portfolioverlustes $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ definiert:

$$CVaR_\alpha(L(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = E[L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq VaR_\alpha(L(\mathbf{x}, \mathbf{y}))] . \quad (2-3)$$

¹⁵ Weiterhin kann gezeigt werden, dass die Lower Partial Moments im allgemeinen nicht die unter Anforderung 4 geforderte Kohärenz-Eigenschaft erfüllen.

¹⁶ Siehe z. B. Jorion (2000), S. 81 und S. 109.

¹⁷ Siehe z. B. Poddig (2000), S. 137.

¹⁸ Zur Definition siehe z. B. Acerbi/Tasche (2002), Rockafellar/Uryasev (2002), Yoshihara/Yamai (2001a) sowie Yoshihara/Yamai (2001b).

¹⁹ Zur genauen Definition siehe Rockafellar/Uryasev (2002). Im Falle un stetiger Verteilungen an der Stelle des α -Quantils wird CVaR definiert als der gewichtete Durchschnitt des VaR und der bedingten Erwartung jenseits des

Die folgende Abbildung 2-1 stellt eine hypothetische Verlustverteilung des Gesamtbankverlustes und die Risikokennzahlen VaR und CVaR als Abweichungsmaße dar:

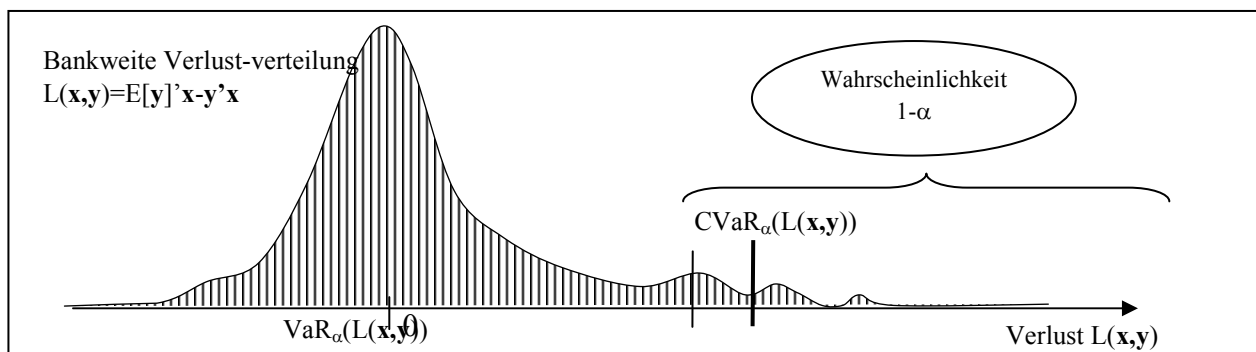


Abbildung 2-1 Verlustverteilung $L(x,y)$ und Abweichungsmaße VaR and CVaR

Eine entscheidende Eigenschaft der Kohärenzaxiomatik sowohl von Artzner et al. als auch von Rockafellar et al. ist die Subadditivitäts-Eigenschaft des verwendeten Risiko- bzw. Abweichungsmaßes. Diese besagt vereinfacht, dass Diversifikationseffekte, die auf unterschiedlichen Portfolioebenen auftreten, geeignet zu messen sind in dem Sinne, dass das Risiko aus der Vereinigung zweier Teilportfolios auf Grund der auftretenden Diversifikationseffekte nie größer werden darf als die Summe der Einzelrisiken der beiden Teilportfolios.²⁰ Das Risikomaß des Value at Risk, das häufig zur Marktrisikomessung eingesetzt wird, kann diese Eigenschaft verlieren, wenn die zu Grunde liegende Verlustverteilung nicht mehr normalverteilt ist.²¹ Dagegen behält der CVaR die Subadditivitäts-Eigenschaft unabhängig von der Form der zu Grunde liegenden Verlustverteilung und ist stets ein kohärentes Risiko- bzw. Abweichungsmaß darstellt.²² Er ist zudem ein konvexes Risiko- bzw. Abweichungsmaß, das die Existenz eines risikominimalen Portfolios über einer konvexen Menge und damit die Lösbarkeit der Optimierungsaufgabe (P) sicherstellt²³ und erfüllt damit die Anforderungen 4 und 5. Weiterhin lässt sich feststellen, dass CVaR zur Risikomessung beliebiger, auch diskreter Verlustverteilungen aus Simulationen geeignet ist²⁴ und damit auch der Anforderung 3 entspricht.

Yamai/Yoshiba zeigen, dass sich CVaR mit einer Erwartungsnutzenmaximierung risikoaverser Investoren unter schwächeren Bedingungen vereinbaren lässt als VaR.²⁵ Die Autoren beweisen, dass CVaR konsistent mit einer Erwartungsnutzenmaximierung risikoaverser Investoren ist, wenn sich die Portfolios in eine Rangfolge nach dem Prinzip der stochastischen Dominanz zweiter

VaR. Vgl. z.B. Acerbi/Tasche (2002), Proposition 4.1, Gleichung (4.4) sowie Rockafellar/Uryasev (2002), Proposition 8.

²⁰ Vgl. Artzner et al. (1999) und Rockafellar et al. (2002).

²¹ Ein Gegenbeispiel wird z.B. in Artzner et al. (1999), Anhang zur Definition 3.3 gegeben.

²² Vgl. Rockafellar/Uryasev (2002), Beispiel 4, S. 7.

²³ Siehe Rockafellar/Uryasev (2000).

²⁴ Vgl. Rockafellar/Uryasev (2002), S. 4.

²⁵ Siehe Yoshiba/Yamai (2001b), S. 26.

Ordnung bringen lassen.²⁶ Andererseits zeigen sie, dass dies für den VaR nur unter der zusätzlichen Bedingung gilt, dass die Verluste eine elliptische Verteilung mit endlicher Varianz und identischem Mittelwert aufweisen.²⁷ Damit erfüllt CVaR die Anforderung 6 besser als VaR.

Zudem kann der CVaR aus einer gegebenen Stichprobe einfach als der Mittelwert aller Verlustwerte, die im Verteilungsende jenseits des Value at Risk auftreten, geschätzt werden. Nach Abzählen des VaR aus einer gegebenen Stichprobe erfordert die Schätzung des CVaR lediglich einen weiteren einfachen Rechenschritt, nämlich die Bildung des Mittelwertes jenseits des VaR im Verteilungsende. Daher wird vermutet, dass das Risikomaß des CVaR die Anforderung 7 der Praktikabilität erfüllt und im Praxiseinsatz Akzeptanz finden kann, obwohl mit Sicherheit intensive Diskussionen bei der Einführung eines neuen Risikomaßes zu erwarten sind. Zusammenfassend wird festgehalten, dass CVaR die an ein bankweites Risikomaß gestellten Anforderungen am besten erfüllt und daher der internen Risikomessung im Optimierungsmodell zu Grunde gelegt wird.

2.2 Grundlegendes Risk-/Return-Optimierungsmodell

In der Literatur wurden zahlreiche Ansätze zur Risiko-/Ertrags-Portfoliooptimierung vorgeschlagen, die jedoch weitgehend auf hier als ungeeignet klassifizierten Risikokennzahlen basieren.²⁸ Im folgenden wird ein Optimierungsalgorithmus vorgestellt, der auf dem Risikomaß des CVaR basiert und die Risiko-/Ertrags-Struktur des Gesamtbankportfolios auf der Grundlage dieses neuen Risiko- bzw. Abweichungsmaßes optimiert.

Gemäß der allgemeinen Formulierung des Optimierungsproblems (P) in der Gleichung (2-1) erfolgt eine Maximierung des erwarteten Gesamtbank>Returns unter den Nebenbedingungen NB 1 und NB 3: Es wird das grundlegende Optimierungsmodell (P_{CVaR}) dargestellt, welches die erwarteten Returns des Bankportfolios unter einer CVaR-Nebenbedingung maximiert. Zur Lösung wird ein Optimierungsalgorithmus von Rockafellar/Uryasev angewendet, der das Ausgangsproblem (P_{CVaR}) in ein lineares Optimierungsproblem überführt.²⁹ Verkürzt dargestellt, nutzt dieser Ansatz die Tatsache aus, dass CVaR durch eine konvexe Hilfsfunktion ausgedrückt werden kann, die sich durch stückweise lineare Funktionen annähern lässt. Basierend auf einer Stichprobe der Marktpreise der Bank-Assets zum Prognosehorizont wird die ursprüngliche CVaR Bedingung durch eine Menge linearer Nebenbedingungen ersetzt und das ursprüngliche Problem (P_{CVaR}) durch die Lösung des linearen Problems approximiert.

Entscheidungsvariable im Optimierungsmodell sind die Exposures der Bank-Assets. Sei $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)'$ der Vektor der Exposures der Assets des Bankportfolios, wobei n die Gesamtanzahl der

²⁶ Siehe Yoshida/Yamai (2001b), Theorem 15, S. 21.

²⁷ Siehe Yoshida/Yamai (2001b), Theorem 14, S. 20.

²⁸ Siehe z.B. Alexander/Baptista (2000), Burmester (1999), Caouette (1998) oder Huismann (1999).

²⁹ Zur detaillierten Herleitung des Ansatzes siehe Rockafellar/Uryasev (2000).

Assets bezeichnet, und $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)'$ der Vektor der erwarteten Returns der Assets.³⁰ Es wird eine lineare Zielfunktion $\mu(\mathbf{x})$ des bankweiten erwarteten Returns definiert, die im Optimierungsproblem maximiert wird:

$$\mu(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \mu_j x_j. \quad (2-4)$$

Das bankweit verfügbare ökonomische Kapital wird mit `oec_kap_max` bezeichnet. Es stellt die Obergrenze des insgesamt maximal tolerierten Verlustrisikopotenzials dar. Sei α das Konfidenzniveau der internen Risikosteuerung, $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_K$ eine Stichprobe von Marktpreisvektoren, wobei K die Gesamtanzahl der erzeugten Szenarien darstellt, und z_1, \dots, z_K nicht negative Hilfsvariable, sowie q eine beliebige reelle Zahl. Die CVaR-Nebenbedingung wird durch die folgenden Ungleichungen modelliert:

<p>(i) $q + \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K z_k \leq \text{oec_kap_max},$</p> <p>(ii) $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k) - q \leq z_k, \quad k = 1, \dots, K,$</p> <p>(iii) $-z_k \leq 0, \quad k = 1, \dots, K,$</p> <p>(iv) $q \in \mathfrak{R}.$</p>	}	<p>Im Optimum...</p> <ul style="list-style-type: none"> - Ist q ein Schätzer des Portfolio-VaR, - Ist die linke Seite von (i) ein Schätzer des Portfolio-CVaR. 	(2-5)
---	---	--	-------

Rockafellar/Uryasev beweisen, dass im Optimum die linke Seite der Ungleichung (i) ein Schätzer für den Portfolio-CVaR ist: Sie zeigen, dass die freie Variable q im Optimum einen Schätzer des Portfolio-VaR zum gegebenen Konfidenzniveau α darstellt. Auf der linken Seite der Ungleichung (i) ermittelt die gewichtete Summe der Hilfsvariablen z_1 bis z_K den Durchschnitt aller Verluste, die den Wert q , d.h. im Optimum den VaR, übersteigen. Diese Summe wird mit der Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ gewichtet. Damit repräsentiert die linke Seite der Gleichung (2-5)(i) einen Schätzer des CVaR in der optimalen Lösung.

Um den Bereich der zulässigen Lösungen zu definieren, werden Vektoren **up_bound** und **low_bound** der Ober- und Untergrenzen für die zulässigen Exposures der einzelnen Assets definiert:

(i) **up_bound** = $(\text{up_bound}_1, \dots, \text{up_bound}_n)'$, (2-6)
(ii) **low_bound** = $(\text{low_bound}_1, \dots, \text{low_bound}_n)'$.

Mit Hilfe dieser Vektoren werden die Exposures der einzelnen Assets beschränkt:

$$\mathbf{low_bound} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{up_bound}, \quad (2-7)$$

d.h. $\text{low_bound}_i \leq x_i \leq \text{up_bound}_i, i=1, \dots, n.$

Das grundlegende Optimierungsmodell (P_{CVaR}) wird wie folgt zusammengefasst:

³⁰ Als erwartete Returns μ_i der einzelnen Assets können dabei Schätzungen der erwarteten Deckungsbeiträge angenommen werden. Für eine genauere Darstellung siehe Theiler (2001), S. 161, sowie zur allgemeinen Darstellung der Ergebnissystematik Schierenbeck (1997a), S. 272.

Optimierungsmodell (P_{CVaR})

(2-8)

$$(i) \quad \mu(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}' \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i \rightarrow \max$$

Nebenbedingung 1: Interne Risikobegrenzung

$$(ii) \quad q + \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K z_k \leq \text{oc_kap_max},$$

$$(iii) \quad L(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k) - q \leq z_k, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$(iv) \quad -z_k \leq 0, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$(v) \quad q \in \mathfrak{R}.$$

Nebenbedingung 3: Zulässiger Bereich

$$(vi) \quad \text{low_bound} \leq \mathbf{x} \leq \text{up_bound}.$$

Das Problem (P_{CVaR}) ist ein lineares Optimierungsmodell. Rockafellar/Uryasev stellen als wesentlichen Vorteil ihres Verfahrens heraus, dass dieser Optimierungsalgorithmus zur Bestimmung Risiko-/Ertrags-effizienter Portfolios einfach mit Hilfe linearer Programmier-techniken umgesetzt werden kann.

2.3 Integration der aufsichtsrechtlichen Nebenbedingung

Im folgenden wird aufgezeigt, wie die regulatorische Nebenbedingung in das Optimierungsmodell (P_{CVaR}) integriert werden kann. Dabei wird zunächst auf die derzeit gültigen Regelungen von „Basel I“ eingegangen und anschließend skizziert, wie die neuen „Basel II“-Regelungen in dem Optimierungsansatz berücksichtigt werden. Eine umfassende Darstellung findet sich in Theiler (2003) und Theiler (2001).

Dem Basel I-Akkord bzw. im deutschen Recht dem Grundsatz I gemäß dürfen Banken einen Mindestkapitalquotienten aus zulässigem aufsichtsrechtlichen Kapital und gemessenen Risiken von 8 % nicht unterschreiten:³¹

$$\frac{\text{Kernkapital} + \text{Ergänzungskapital} + \text{Dritttrangmittel}}{\text{Kreditrisiko des Bankbuchs} + 12.5 * \text{Marktrisiko des Handelsbuchs}} \geq 8 \% . \quad (2-9)$$

Die Regulierungen differenzieren zwischen Bankbuch- und Handelsbuchpositionen.³² Die Bank muss die Mindestkapitalanforderung für das Kreditrisiko des Bankbuchs und für das Marktrisiko des Handelsbuchs erfüllen.³³ Die verschiedenen Risiken sind mit unterschiedlichen Komponenten

³¹ Siehe Basel (1988) und Basel (1996) bzw. im deutschen Recht der Grundsatz I, BAKred (1997).

³² Das Handelsbuch umfasst alle Positionen, die die Bank zu Zwecken des kurzfristigen Eigenhandels hält, während das Bankbuch alle Nichthandelspositionen umfasst. Zur genauen Definition siehe Basel (1996), Introduction I (a), paragraph 2.

³³ Die Regelungen für die Marktrisiko-Unterlegung sind einzuhalten, sofern die Bank ein Handelsbuchinstitut ist. Zur Definition siehe § 2 KWG, Deutsche Bundesbank (1997).

des regulatorischen Kapitals zu unterlegen, zu denen das Kernkapital, das Ergänzungskapital und die Drittrangmittel zählen.³⁴ Die maximal anrechenbaren Beträge der verschiedenen Kapitalkomponenten sind in Relation zum verfügbaren Kernkapital und im Verhältnis zueinander beschränkt.³⁵

In einer ersten Bedingung wird das Kreditrisiko des Bankbuchs berechnet und auf das verfügbare Kern- und Ergänzungskapital angerechnet. Anschließend wird das freie, noch nicht gebundene Kern- und Ergänzungskapital zuzüglich der Drittrangmittel zur Deckung der Marktrisiken des Handelsbuchs verwendet. Die folgende Abbildung 2-2 stellt die grundlegende Struktur der aufsichtsrechtlichen Verlustrisikobegrenzung nach „Basel I“ dar:

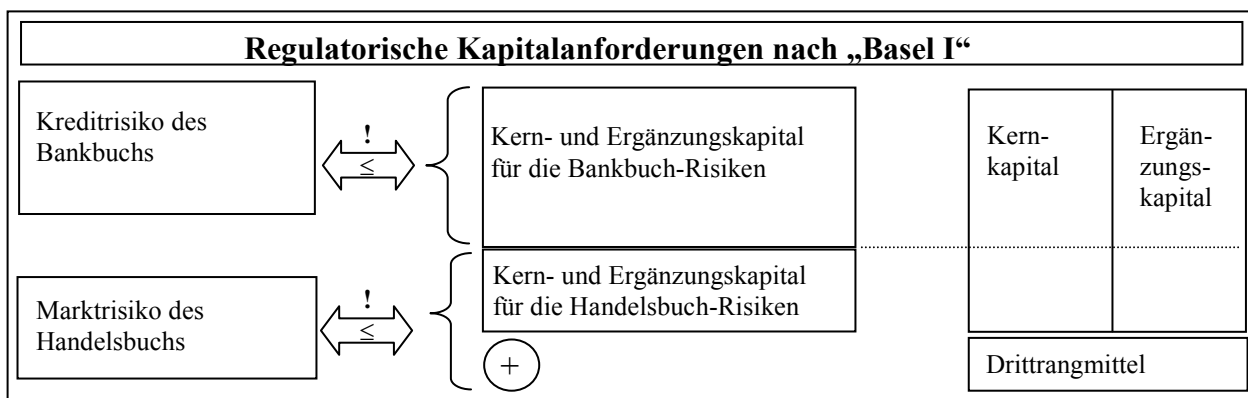


Abbildung 2-2 Regulatorische Kapitalanforderungen nach „Basel I“

Im Optimierungsmodell werden unter der Nebenbedingung NB 2 die aufsichtsrechtlichen Eigenkapitalstruktur-Regeln, sowie die Risikobegrenzungsregeln des Grundsatzes I für das Ausfallrisiko des Anlagebuchs und für das Marktrisiko des Handelsbuchs abgebildet. Die Eigenkapitalunterlegung der Risikoaktiva in der ersten Bedingung des Grundsatzes I wird durch eine lineare Nebenbedingung dargestellt. Wird zur Begrenzung der Marktrisiken des Handelsbuchs ein internes Modell verwendet, so kommt weitere CVaR-Nebenbedingung als obere Abschätzung des Handelsbuch-VaR hinzu. Beim Einsatz der Standardmethode ergibt sich eine weitere lineare Nebenbedingung für die Handelsbuch-Positionen. Zur genaueren Darstellung sei auf Theiler (2003) sowie Theiler (2001) verwiesen.

Ziel der neuen Eigenkapitalvereinbarungen des „Basel II“-Akkords ist eine Verbesserung der Sicherheit und Stabilität der Finanzsysteme.³⁶ Das Regelwerk besteht aus Mindestkapitalanforderungen (Säule 1), dem Supervisory Review Process (Säule 2) und der Marktdisziplin (Säule 3). Im Zusammenhang der regulatorischen Kapitalanforderungen, die im Optimierungsmodell abgebildet werden, werden die Neuerungen in der Säule 1 betrachtet. Die zur Risikodeckung verfügbaren regulatorischen Kapitalressourcen werden durch „Basel II“ nicht verändert. Gleiches gilt für die Marktrisikorechnung der Handelsbuchpositionen. Für die Kreditrisikounterlegung des

³⁴ Zur Definition des regulatorischen Kapitals siehe Basel (1996), Introduction II (a) sowie im deutschen Recht § 10 KWG, Deutsche Bundesbank (1997).

³⁵ Siehe Basel (1996) sowie § 10 KWG, Deutsche Bundesbank (1997).

³⁶ Siehe Basel (2001).

Bankbuchs ergeben sich zwei alternative Ansätze, die Standardmethode und der Internal Ratings Based Approach. In beiden Ansätzen erfolgt eine Gewichtung der einzelnen Assets mit einem bestimmten vorgegebenen Risikokoeffizienten, der je nach der gewählten Methode einen höheren Grad an Risikoadjustierung aufweist. Die grundsätzliche Struktur der Risikoanrechnung durch eine Gewichtung der Exposure des einzelnen Assets mit einem Risikogewicht bleibt unverändert, so dass die *formale Darstellung* dieser Nebenbedingung im Optimierungsmodell gleich bleibt. Es ergeben sich jedoch modifizierte Risikogewichtungs-Koeffizienten für die einzelnen Assets, welche Inputdaten für die Optimierung darstellen.

In den Regelungen von „Basel II“ ist zusätzlich das operationelle Risiko zu berücksichtigen. Hierzu stehen alternative Ansätze zur Verfügung. Mit einem zunehmenden Grad an Risikoadjustierung werden dabei der Basic Indicator Approach, der Standard Approach und der Advanced Measurement Approach unterschieden. Die operationellen Risiken werden dabei entweder auf Bank- oder auf Profit Center-Ebene quantifiziert. Da sich jedoch keine direkte Abhängigkeit von den Entscheidungsvariablen im Optimierungsmodell, d.h. den Exposures der Einzelgeschäfte ergibt, werden Größen für das operationelle Risiko im Optimierungsmodell als Input-Konstanten auf Bank- und Profit Center-Ebene berücksichtigt.³⁷ Zur genaueren Darstellung sei auf Theiler (2003) verwiesen. Insgesamt wird festgehalten, dass das Optimierungsmodell in seiner Berücksichtigung des aufsichtsrechtlichen Risikos sowohl konform mit den „Basel I“- als auch mit den „Basel II“-Regelungen ist.

3 Anwendungsbeispiel

Die Wirkungsweise der Risiko-/Ertrags-Optimierung des Gesamtbank-Portfolios wird im folgenden anhand eines Anwendungsbeispiels verdeutlicht.³⁸ Eine Beispiel-Bank führt ihre Jahresplanung durch und möchte ihr Planportfolio für das Folgejahr festlegen. Das aufsichtsrechtliche Eigenkapital ist derzeit nahezu ausgelastet. Im folgenden Geschäftsjahr ist keine Erhöhung des regulatorischen Kapitals möglich. Um trotz des knappen aufsichtsrechtlichen Kapitals zusätzliches Geschäftspotential zu schöpfen, erwägt der Vorstand eine Erhöhung des derzeit maximal ausgelasteten ökonomischen Kapitals um 17 Einheiten, kurz mit E bezeichnet, durch die Hinzunahme einer größeren stillen Reserve. Weiterhin soll im Planjahr ein Mindest-RORAC von 14,00% erreicht werden, der definiert ist als das erwartete Gesamtbank-Ergebnis dividiert durch den CVaR des Gesamtbank-Portfolios. Für die Unternehmensleitung stellen sich die folgenden zentralen Fragen:

- Soll das aktuelle Risikoniveau beibehalten werden (Szenario 1) oder um 17 E zusätzliche stille Reserven erhöht werden (Szenario 2)?
- Welche Risiko-/Ertrags-Plankennzahlen ergeben sich daraus für das Gesamtbank-Planportfolio?

Zur Lösung des Problems werden verschiedene Optimierungen unter alternativen internen Risikoniveaus, d. h. Obergrenzen für das ökonomische Kapital, durchgeführt. Das Optimierungs-

³⁷ Diese werden im Falle der Anwendung der „Basel I“-Anrechnung gleich null gesetzt.

³⁸ Vgl. Theiler (2001), S. 207 ff.

problem wird für schrittweise erhöhte Obergrenzen oec_kap_max in der Restriktion (2-8)(ii) gelöst und die Effizienzlinie für die Gesamtbank generiert. Um die Effekte des knappen regulatorischen Kapitals zu verdeutlichen, werden die Optimierungen gleichzeitig mit und ohne aufsichtsrechtliche Nebenbedingung („Fall A“ bzw. „Fall B“) durchgeführt und damit die entsprechenden Effizienzlinien unter Berücksichtigung (Fall B) und unter Ausschluss der regulatorischen Nebenbedingung (Fall A) erzeugt. Die folgende Abbildung illustriert die Ergebnisse. Das Ausgangsportfolio wird mit PF 0 bezeichnet, die optimalen Portfolios der Optimierungen im Falle A mit „PF 1“ (Szenario 1) und „PF 3“ (Szenario 2), diejenigen der Optimierungen im Falle B mit „PF 2“ (Szenario 1) und „PF 4“ (Szenario 2).

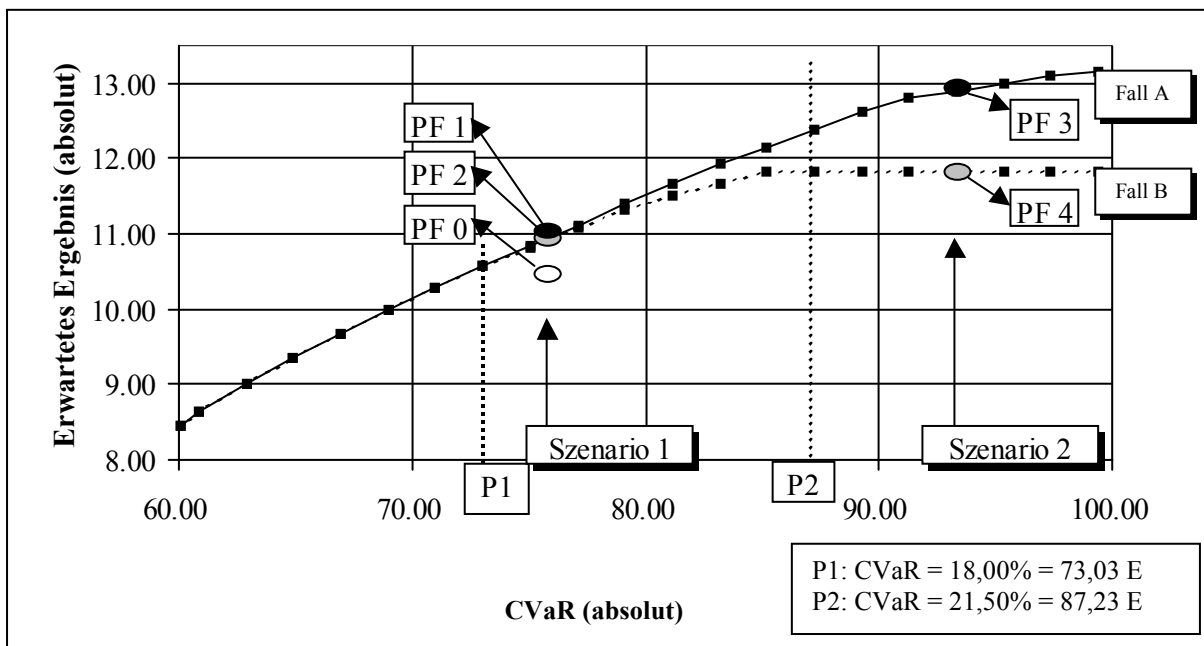


Abbildung 3-1: Effizienzlinien der Risiko-/Ertrags-optimalen Portfolios der Beispiel-Bank

Die Lage der beiden Effizienzlinien der Risk-/Return-optimalen Planportfolios verdeutlicht, dass links des Risikoniveaus P1 nur die interne Risikonebenbedingung, rechts des Risikoniveaus P2 nur die aufsichtsrechtliche Restriktion aktiv ist. Im Intervall zwischen P1 und P2 sind beide, d.h. die interne und die aufsichtsrechtliche, Nebenbedingungen aktiv. Das bedeutet, dass nur in diesem Intervall beide Kapitalressourcen maximal ausgenutzt werden.

Die Abbildung 3-1 illustriert weiterhin, dass ab dem Risikoniveau P1 die Effizienzlinie im Fall B unter Berücksichtigung der regulatorischen Nebenbedingung unterhalb derjenigen im Fall A bleibt. Dies bedeutet, dass auf Grund des knappen regulatorischen Kapitals entgangene Gewinne in Höhe der Differenz der beiden Effizienzlinien entstehen. Je höher das interne Risikoniveau gewählt wird, umso deutlicher tritt dieser Effekt zu Tage. Bei dem gegebenen Risikoniveau des Ausgangsportfolios im Szenario 1 entstehen beispielsweise 0,03 E, im Szenario 2 0,67 E entgangene Gewinne.³⁹

³⁹ Zur detaillierteren Analyse dieser Effekte der regulatorischen Kapital-Arbitrage wird auf Theiler et al. (2003) verwiesen.

Ein Vergleich der optimalen Portfolios unter der regulatorischen Nebenbedingung im Fall B PF 2 (Szenario 1) und PF 4 (Szenario 2) zeigt weiterhin, dass eine Erhöhung des ökonomischen Kapitals im Szenario 2 zwar zu einem um 0,88 E höheren Ergebnis als im Portfolio PF 1 führt, dass jedoch der RORAC von 13,57% unter der geforderten Mindest-Risikorentabilität von 14,00% bleibt und zudem niedriger ist als derjenige des Portfolios PF 1 (14,39%) und sogar des Ausgangsportfolios PF 0 (13,98%). Weiterhin wird das interne Risikokapital im Szenario 2 nicht voll ausgelastet. Das Risiko-/Ertrags-optimale Planportfolio PF 2 führt gegenüber dem aktuellen Portfolio PF 0 bei gleichem Risikoniveau zu einer Ergebnissteigerung von 0,31 E, zu einem Plan-RORAC von 14,39% und lastet die Ressourcen des ökonomischen und des regulatorischen Kapitals maximal aus. Als Entscheidungsempfehlung für die Jahresplanung ergibt sich daher: Das Szenario 1, d. h. eine Beibehaltung des derzeitigen Risikoniveaus, wird befürwortet. Eine Erhöhung des ökonomischen Kapitals würde zwar zu höheren erwarteten absoluten Returns führen, jedoch gleichzeitig die risikoadjustierte Performance verschlechtern und zu einer Unterauslastung des bereitgestellten ökonomischen Kapitals führen. Zusammenfassend wird festgehalten, dass sich aus der Anwendung des dargestellten Optimierungsmodells grundlegende Entscheidungsinformationen für eine integrierte Risiko-/Ertrags-orientierte Gesamtbanksteuerung gewinnen lassen.

4 Fazit

Das dargestellte Optimierungsmodell erlaubt eine Risiko-/Ertrags-orientierte Optimierung des Gesamtbank-Portfolios. Es basiert auf dem neuen Risiko- bzw. Abweichungsmaß des Conditional Value at Risk, einem konvexen und kohärenten Risikomaß, das zur Risikomessung des Gesamtbank-Portfolios geeignet ist. Mit dem Optimierungsmodell lassen sich Portfolio-Optimierungen unter alternativen Rahmenbedingungen durchführen, wobei sowohl aufsichtsrechtliche als auch interne Risikobegrenzungsregeln gleichzeitig berücksichtigt werden. Es werden grundlegende Informationen für eine Risk-/Return-effiziente Nutzung der Kapitalressourcen des ökonomischen und des regulatorischen Kapitals generiert. Das Optimierungsmodell liefert wesentliche Entscheidungsempfehlungen für eine Risiko-/Ertrags-orientierte Gesamtbank-Steuerung. In Zeiten sinkender Ertragsmargen bei gleichzeitig steigenden Risiken leistet es damit einen wichtigen Beitrag zur Sicherung der Wettbewerbsposition des Unternehmens und kann insbesondere als ein wesentliches Instrument zur Sicherung der Bonität der Bank angesehen werden.

5 Literaturverzeichnis

Acerbi/Tasche (2002),

Acerbi, C. Tasche, D., On the coherence of expected shortfall, *Journal of Banking and Finance*, 26(7), 2002, S. 1519-1533.

Alexander/Baptista (2000),

Alexander, G., Baptista, A., Economic Implications of Using a Mean-VaR Model for Portfolio Selection: A Comparison with Mean-Variance Analysis, Working Paper, University of Minnesota, Carlson School of Management, Department of Finance, May 2000.

Artzner et al. (1999),

Artzner, Ph., Delbaen, F., Eber, J.-M., Heath, D., Coherent Measures of Risk, *Mathematical Finance*, Vol. 9, No. 3, 1999, S. 203-228.

BAKred (1997),

Bundesaufsichtsamt für das Kreditwesen, Bekanntmachung über die Änderung und Ergänzung der Grundsätze über das Eigenkapital und die Liquidität der Kreditinstitute, Geschäftsnummer I7-A223-2/93, vom 29. Oktober 1997, Berlin 1997.

Basel (1988),

Basel committee on Banking Supervision, International convergence of capital measurement and capital standards, Bank for International Settlements, Basel, Juli 1988.

Basel (1996),

Basel committee on Banking Supervision: Amendment to the capital accord to incorporate market risks, Bank for International Settlements, Basel, Januar 1996.

Basel (2001),

Basel Committee on Banking Supervision, Consultative Document: The New Basel Capital Accord, January 2001, Bank for International Settlements, Basel, Januar 2001.

Büschgen (1998),

Büschgen, H., Bankbetriebslehre, 5. Aufl., Wiesbaden 1998.

Burmester (1999),

Burmester, C., Hille, C.; Deutsch, H., Risikoadjustierte Kapitalallokation, in: Eller, R., Gruber, W., Reif, M. (Hrsg.), Handbuch Bankenaufsicht und Interne Risikosteuerungsmodelle, Stuttgart 1999, S. 389-418.

Caouette (1998)

Caouette, J., Altman, F., Narayanan, V., Managing Credit Risk: The Next Great Financial Challenge, New York usw. 1998.

Crouhy et al. (2001),

Crouhy, M., Galai, D., Mark, R., Risk Management, McGraw-Hill, New York, 2001.

- Deutsche Bundesbank (1997),
Gesetz über das Kreditwesen, Bekanntmachung der Neufassung des Gesetzes über das Kreditwesen vom 22. Oktober 1997, in: Deutsche Bundesbank (Hrsg.), Bankrechtliche Regelungen Band 2, Frankfurt a. M., April 1998, S. 20-139.
- Huisman (1999),
Huisman, R., Koedijk, K., Pownall, R., Asset Allocation in a Value-at-Risk Framework, Erasmus University Rotterdam, Faculty of Business Administration, Financial Management (Hrsg.), Working Paper, Rotterdam, April 1999.
- Jorion (2000),
Jorion, P., Value at risk: the new benchmark for managing financial risk, McGraw-Hill, 2. Aufl., New York 2000.
- Meyer zu Selhausen (2000),
Meyer zu Selhausen, H., Bank-Informationssysteme: Eine Bankbetriebswirtschaftslehre mit IT-Schwerpunkt, Stuttgart 2000.
- Poddig (2000),
Poddig, T., Dichtl, H., Petersmeier, K., Statistik, Ökonometrie, Optimierung: Methoden und praktische Anwendungen in Finanzanalyse und Portfoliomangement, Bad Soden 2000.
- Rockafellar/Uryasev (2000),
Rockafellar, R. T. and Uryasev, S., Optimization of Conditional Value-At-Risk, *The Journal of Risk*, Vol. 2, No. 4, 2000, S. 21-51.
- Rockafellar/Uryasev (2002),
Rockafellar, R. T. and Uryasev, S., Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions, *Journal of Banking and Finance*, 26(7), 2002, S. 1443-1471.
- Rockafellar et al. (2002),
Rockafellar, R. T., Uryasev, S., Zabarankin, M., Deviation Measures in Risk Analysis and Optimization, Research Report 2002-7, Department of Industrial & Systems Engineering, University of Florida, December 2002.
- Schierenbeck (1997a),
Schierenbeck, H., Ertragsorientiertes Bankmanagement: Band 1: Grundlagen, Marktzinsmethode und Rentabilitäts-Controlling, 5. Auflage, Wiesbaden 1997.
- Schierenbeck (1997b),
Schierenbeck, H., Ertragsorientiertes Bankmanagement: Band 2: Risiko-Controlling und Bilanzstruktur-Management, 5. Auflage, Wiesbaden 1997.
- Süchting (1992),
Süchting, J., Bankmanagement, 3. Auflage, Stuttgart 1992.
- Theiler (2002),
Theiler, U., Optimierungsverfahren zur Risk-/Return-Steuerung der Gesamtbank, Wiesbaden 2002.

Theiler (2003),

Risk Return Management Approach for the Bank Portfolio, in: Szego, G. (Hrsg.): New Risk Measures for Investment and Regulation, Wiley, 2003.

Theiler et al. (2003),

Theiler, U., Bugera, V., Revenko, A., Uryasev, S., Regulatory Impacts on Credit Portfolio Management, in: Leopold-Wildburger, U., Rendl, F., Wäscher G. (Hrsg.), Operations Research Proceedings 2002, Selected Papers on the International Conference on Operations Research (SOR 2002), Klagenfurt, September 2-5, 2002, S. 335-340.

Yoshihara/Yamai (2001a),

Yoshihara, T., Yamai, Y., Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value-at-Risk: Their Estimation Error, Decomposition and Optimization, in: Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, Januar 2001.

Yoshihara/Yamai (2001b),

Yoshihara, T., Yamai, Y., Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value-at-Risk (2): expected utility maximization and tail risk, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, Discussion Paper No. 2001-E-14, August 2001.