Grundmodell zur integrierten Risk-/Return-Optimierung des Gesamtbank-Portfolios

Dr. Ursula-A. Theiler

Risk Training
Carl-Zeiss-Str. 11
D-83052 Bruckmühl

Tel./ Fax: 08062/805545
E-mail: theiler@risk-training.de
http://www.risk-training.de

erschienen in:
Buhl, H. U., Kreyer, N., Steck, W. (Hrsg.),
e-Finance - Innovative Problemlösungen für Informationssytseme in der Finanzwirtschaft, Berlin usw. 2001.

Vortrag im Rahmen der
3. Konferenz Informationssysteme in der Finanzwirtschaft,
19. September 2001, Universität/Messe Augsburg

Grundmodell zur integrierten Risk-/Return-Optimierung des Gesamtbank-Portfolios

Ursula-A. Theiler

Risk Training (theiler@risk-training.de)

Zusammenfassung:

Ziel des Beitrags ist es, ein Grundmodell zur Portfolio-Optimierung darzustellen, das ein Risk-/Return-optimales Gesamt-Portfolio unter Annahme beliebiger Portfolio-Wertverteilungen bestimmt, indem der erwartete Portfolio-Return unter Einhaltung eines vorgegebenen Risikoniveaus maximiert wird. Das Grundmodell erlaubt eine integrierte Betrachtung von Marktpreis- und Kreditrisiken und kann auf ein Gesamtbank-Portfolio angewendet werden. Das Optimierungsmodell basiert auf dem Risikomaß des Conditional Value at Risk, einem konvexen und kohärenten Risikomaß. Die Optimierungsaufgabe lässt sich mit einer Erwartungsnutzen-Maximierung eines risikoaversen Investors vereinbaren und liefert damit auch aus verallgemeinerter portfoliotheoretischer Sicht fundierte Aussagen. Für das optimale Portfolio werden Risk-/Return-Kennziffern auf Portfolio- und Einzelpositions-Ebene ermittelt. Zur Berechnung der Risikobeiträge der Einzelpositionen wird das Euler-Prinzip angewendet, das eine effiziente Kapitalallokation im Portfolio sicherstellt. Es werden Einsatzmöglichkeiten des Grundmodells in der Gesamtbank-Steuerung aufgezeigt.

Schlüsselworte:
Bankportfolio, Conditional Value at Risk, Euler-Prinzip, Gesamtbanksteuerung, Integrierte Risk-/Return-Steuerung, Kapitalallokation, Portfoliooptimierung, quantilsabhängige Risikomaße, Risikomanagement, RORAC.

1 Problemstellung und Vorgehensweise

Im Risikomanagement der Banken gewinnt eine integrierte Steuerung der verschiedenen Risikoarten, insbesondere der Marktpreis- und Kreditrisiken, zunehmend an Bedeutung. Neben einer einheitlichen Risikomessung und Risikobegrenzung resultiert hieraus für die Banken die Notwendigkeit, Risiko- und Rentabilitätsmanagement enger zu verzahnen und eine Risk-/Return-orientierte

Gesamtbank-Portfolio-Steuerung auf der Grundlage einheitlicher Risiko- und Performancemaße umzusetzen.

In diesem Beitrag wird ein Grundmodell zur integrierten Risk-/Return-Steuerung eines Gesamtbank-Portfolios, im Folgenden verkürzt als RRS-Grundmodell bezeichnet, dargestellt, welches das Gesamtbank-Portfolio optimiert, indem der erwartete Portfolio-Return unter Einhaltung eines vorgegebenen Risikoniveaus maximiert wird. Das Optimierungsmodell lässt beliebige Verteilungen der Portfolio-Returns zu und eignet sich damit als Grundmodell für die Optimierung des Gesamtbank-Portfolios. Für das optimale Portfolio werden effiziente Risk-/Return-Kennzahlen auf Ebene des Gesamt-Portfolios und der Einzelkomponenten ermittelt. Die Berechnung der Risikobeiträge der Einzelpositionen erfolgt nach dem Euler-Prinzip, das eine effiziente Kapitalallokation auf Portfolioebene sicherstellt und auftretende Diversifikationseffekte den einzelnen Positionen verursachungsgerecht zuordnet.

Als Voraussetzung der Portfoliooptimierung wird in *Kapitel 2* zunächst ein Risikomaß festgelegt, das sich für eine Risikomessung und -aggregation des Gesamtbank-Portfolios eignet. Anschließend wird ein Optimierungsmodell erarbeitet, das eine Risk-/Return-Optimierung für ein Portfolio mit beliebiger Wertverteilung durchführt und damit insbesondere auf das Gesamtbank-Portfolio, aber beispielsweise auch auf beliebige Options- oder reine Kreditportfolios anwendbar ist. Gegenstand des *Kapitels 3* ist die Lösung des Optimierungsproblems. Für das optimale Portfolio werden Risk-/Return-Kennzahlen sowohl auf Portfolioebene als auch auf Ebene der Einzelkomponenten berechnet. Im *Kapitel 4* werden Aspekte der Anwendung des RRS-Grundmodells in der Gesamtbank-Steuerung betrachtet. Es werden erforderliche Modellannahmen und wesentliche Einsatzmöglichkeiten aufgezeigt. Der Beitrag schließt mit einer Bewertung des dargestellten RRS-Grundmodells im *Kapitel 5*.

Das RRS-Grundmodell basiert auf einer *Modularisierung* der Fragestellungen der integrierten Risikomessung und -steuerung [vgl. z. B. CuHi01]. Das RRS-Grundmodell setzt voraus, dass Markt- und Kreditrisiken in einem integrierten Ansatz gemessen und Marktpreise aller betrachteten Positionen zum Beobachtungshorizont geschätzt werden. Diese Prognosen werden als Input-Daten verwendet. Die Fragestellung der integrierten Risk-/Return-orientierten Portfoliosteuerung wird damit unabhängig von den angewandten Verfahren der integrierten Risikomessung gelöst [hierzu z. B. Isco99; Barn00]. Das RRS-Grundmodell weist insofern den Charakter eines EDV-bezogenen Fachkonzepts auf. Aspekte der technischen Umsetzung, insbesondere der Beschaffung der erforderlichen Input-Daten, behandelt es nicht.

2 Erarbeitung des RRS-Grundmodells

2.1 Festlegung des Risikomaßes

An das Risikomaß, das sowohl einer integrierten Risikomessung als auch der hier betrachteten integrierten Risikosteuerung zu Grunde liegt, sind verschiedene Anforderungen zu stellen. Es muss eine integrierte Messung von Marktpreis- und Kreditrisiken erlauben. Beide Risikoarten müssen sich gleichartig bewerten und zu einer Gesamtrisikokennzahl aggregieren lassen. Es ist sicherzustellen, dass das Risikomaß eine konsistente Risiko-Aggregation im Portfolio erlaubt. Dies lässt sich durch die Kohärenz-Eigenschaft des Risikomaßes sicherstellen. Unter dem Begriff der Kohärenz haben [ArDe99] vier Eigenschaften für Risikomaße axiomatisch begründet, die eine konsistente Risikomessung im Portfolioverbund garantieren. Ein kohärentes Risikomaß erfüllt die Eigenschaften der Homogenität, Subadditivität, Translationsinvarianz und Monotonie und erlaubt die für eine Portfolio-Steuerung entscheidende Risiko-Aggregation verschiedener Teilportfolios über mehrere Hierarchiestufen und berücksichtigt dabei alle Risikoabhängigkeiten im Portfolioverbund.

Grundvoraussetzung für die Lösbarkeit des Risk-/Return-Optimierungsproblems ist die Konvexität des verwendeten Risikomaßes, die aus der oben dargestellten Kohärenz-Eigenschaft folgt [Tasc01, S. 2]. Die Konvexität impliziert, dass die Optimierung über einer konvexen Menge zulässiger Portfolios lösbar ist und die resultierende Effizienzlinie in dem zugehörigen Risiko-Ertrags-Diagramm eine streng konkave und wachsende Gestalt hat, d. h., dass zu jedem Risikoniveau eine eindeutige optimale Risiko-Ertrags-Kombination existiert.

Die Aufgabe, ein Risk-/Return-optimales Portfolio zu bestimmen, das den erwarteten Return maximiert und dabei eine Obergrenze für das Risikopotenzial einhält, stellt ein verallgemeinertes Entscheidungsproblem der Portfolio Selektion dar. Die Schwierigkeit gegenüber der klassischen Portfoliotheorie liegt darin, dass ein Gesamtbank-Portfolio zum großen Teil aus Kreditrisiko-abhängigen Positionen besteht. Damit kann keinesfalls von einer multivariaten Normalverteilung des Portfoliowertes ausgegangen werden. Daraus folgt, dass weder klassische (μ,σ)-, noch neuere (μ,Value at Risk)-Optimierungsansätze aussagekräftige Ergebnisse liefern.

Eine wichtige Voraussetzung für die Optimierung des Gesamtbank-Portfolios besteht in der Auswahl eines geeigneten Risikomaßes für die Risk-/Return-orientierte Gesamtbank-Steuerung. Aus ökonomischer Sicht wird Risiko häufig als Gefahr der einseitigen negativen Abweichung des realisierten von einem erwarteten Ergebnis definiert [Büsc98, S. 865]. Im Einklang mit dieser Risikodefinition stehen Downside-Risikomaße. Im Weiteren werden daher als Vertreter dieser Klasse von Risikokennzahlen die Quantils-abhängigen Maße des *Value at Risk* und des

Conditional Value at Risk, verkürzend als VaR und CVaR bezeichnet, näher betrachtet. Während der VaR den Verlust misst, der mit einer gegebenen Konfidenz-Wahrscheinlichkeit am Ende eines bestimmten Zeitintervalls nicht überschritten wird [z. B. Meye99, S. 12], gibt der CVaR, der auch als *Tail Value at Risk* oder *Expected Shortfall* bezeichnet wird, den Verlust an, mit dem bei Überschreitung des VaR zu rechnen ist, das heißt, der „jenseits" des VaR im Verteilungsende erwartet wird [vgl. z. B. Bert00, S. 8].

Werden beliebige Portfolio-Verteilungen zugelassen und die Normalverteilungsannahme des Portfoliowertes aufgehoben, so ist der VaR nicht mehr subadditiv [ArDe99, S. 13]. Daraus folgt, dass der VaR in diesem allgemeinen Kontext die wichtige Voraussetzung der Konvexitäts-Eigenschaft nicht erfüllt auch kein kohärentes Risikomaß ist. Eine (μ,VaR)-Optimierung des Gesamtbank-Portfolios ist damit nicht unbedingt lösbar, und der VaR ist nicht zur integrierten Risikosteuerung des Gesamtbank-Portfolios geeignet.

Dagegen lässt sich zeigen, dass *der CVaR ein kohärentes und damit auch konvexes Risikomaß ist* [Tasc00; Bert00] und die genannten Anforderungen eines Risikomaßes für die Gesamtbanksteuerung erfüllt. Aus der Konvexität des CVaR folgt, dass die Optimierungsaufgabe der Maximierung der erwarteten Returns unter Einhaltung einer Obergrenze für das Risiko über einer konvexen und nicht leeren Menge stets lösbar ist. Weiterhin lässt sich zeigen, dass ein (μ,CVaR)-optimales Portfolio einer Erwartungsnutzen-Maximierung risikoaverser Investoren entspricht [Bert00, S. 7] und damit auch aus verallgemeinerter portfoliotheoretischer Sicht fundierte Ergebnisse liefert. Daher wird der CVaR dem RRS-Grundmodell als Risikomaß zu Grunde gelegt.

Da der CVaR den erwarteten Verlust *jenseits* des VaR misst, bildet er eine obere Schranke für den VaR und stellt im Vergleich zum VaR ein konservativeres Risikomaß dar. Denn wird für die (μ,CVaR)-Optimierung eine Risikoobergrenze ω vorgegeben, so beträgt der CVaR des optimalen Portfolios höchstens ω. Der VaR des optimalen Portfolios ist definitionsgemäß kleiner oder gleich dem der CVaR des Portfolios und hält damit die Risikoobergrenze ω auf jeden Fall auch ein.

2.2 Modellannahmen für das RRS-Grundmodell

Im RRS-Grundmodell wird von den folgenden Modellannahmen ausgegangen: Ein Portfolio wird als Vektor **x** der Nominalvolumina der n Einzelpositionen x_i des Portfolios, $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)'$ dargestellt. Dabei bedeuten im Folgenden fett gedruckte Buchstaben Vektoren. Zufallsabhängige Größen sind die Marktpreise der einzelnen Positionen y_i zum Prognosehorizont. Jeder Position x_i ist der Marktpreis y_i zugeordnet. Die Marktpreise werden im Vektor $\mathbf{y}=(y_1,...,y_n)'$ zusammengefasst. Dabei wird von einem linearen Zusammenhang zwischen den Marktpreisen und den einzelnen Portfoliopositionen ausgegangen, das heißt, der Wert der i-ten Portfoliokomponente berechnet sich als $y_i x_i$ und der Marktwert des Portfolios $\mathbf{y'x}$ als

$$\mathbf{y'x} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \ . \tag{1}$$

Weiterhin sei eine Verlustfunktion f(**x,y**) gegeben, die den Portfolioverlust in Abhängigkeit von der Entwicklung der Marktpreise als negative Abweichung des realisierten von dem erwarteten Portfoliowert misst. Sie entspricht damit dem hier verwendeten Risikobegriff und wird definiert als

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = E[\mathbf{y}]'\mathbf{x} - \mathbf{y'x} = (E[\mathbf{y}] - \mathbf{y})'\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} (E[y_i] - y_i)x_i \ . \tag{2}$$

Dabei bezeichne E[**y**] den Erwartungsvektor der Marktpreise zum Prognosehorizont. Ein Verlust entsteht, wenn die Funktion f(**x,y**) größer als null ist, d. h., wenn der realisierte Portfoliowert geringer als der erwartete ist. Weist die Funktion f(**x,y**) dagegen einen negativen Wert auf, entsteht ein Gewinn, da der realisierte Wert größer als der erwartete ist.

Im Folgenden wird von einem Konfidenz-Niveau der Höhe β, z. B. β = 95% oder β = 99%, ausgegangen. Der VaR und CVaR der Verlustfunktion f(**x,y**) zum Konfidenz-Niveau β, die als $VaR_\beta(\mathbf{x})$ und $CVaR_\beta(\mathbf{x})$ bezeichnet werden, lauten dann:

$$VaR_\beta(\mathbf{x}) = \inf\{z \in \Re \mid P((f(\mathbf{x},\mathbf{y})) \le z) \ge \beta\} \ , \tag{3}$$

$$CVaR_\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{1-\beta} \int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y})>VaR_\beta(\mathbf{x})} f(\mathbf{x},\mathbf{y})p(\mathbf{y})d\mathbf{y} \ .$$

Dabei wird vereinfachend davon ausgegangen, dass die Dichtefunktion p(**y**) des Zufallsvektors **y** bekannt ist. Diese Voraussetzung ist für die rechnerische Umsetzung des RRS-Grundmodells keine notwendige Bedingung. Vielmehr wird dazu eine gemeinsame Stichprobe der Marktpreise benötigt.

Die folgende Abbildung zeigt die Verlustfunktion f(**x,y**) und die zugehörigen Risikomaße des VaR und des CVaR zum Konfidenz-Niveau β:

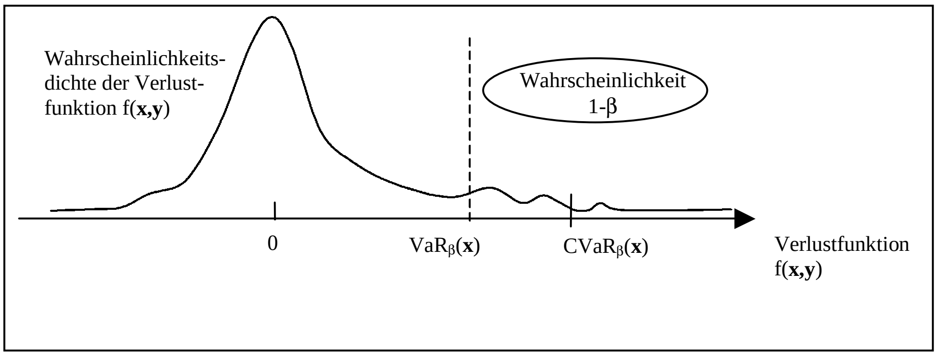

Abbildung 1: Wahrscheinlichkeitsdichte der Verlustfunktion f(**x**,**y**) der Portfolioverluste und zugehörige Quantils-abhängige Risikomaße VaR und CVaR

2.3 Formulierung des (µ,CVaR)-Optimierungsproblems

Das (µ,CVaR)-Optimierungsproblem des Gesamt-Portfolios wird in drei Schritten entwickelt. Zunächst wird im Schritt 1 das Ausgangsproblem der Optimierung auf Basis des CVaR formuliert. Im Schritt 2 wird die CVaR-Nebenbedingung vereinfacht und in Schritt 3 das rechnerisch umzusetzende Optimierungsproblem erarbeitet.

Schritt 1: Formulierung des Ausgangsproblems

Ein allgemeines Optimierungsproblem (P) zur Bestimmung eines (µ,CVaR)-optimalen Portfolios lässt sich wie folgt formulieren:

> ***(P)***
> *"Maximierung des erwarteten Portfolio-Return*
> *unter den Nebenbedingungen:*
>
> *Risikopotenzial des CVaR ≤ Risiko-Obergrenze,*
> *Betrachtung ausschließlich zulässiger Portfolios."*

Grundsätzlich lassen sich Risiko- und Return-Kennzahlen als absolute oder als relative Größen zum Ausgangswert des Portfolios ausdrücken. Zur einheitlichen und eindeutigen Darstellung wird im Folgenden davon ausgegangen, dass sämtliche Risiko- und Erfolgsbeiträge in absoluten Einheiten gemessen werden.

Der erwartete Portfolio-Return µ(**x**) wird als lineare Funktion formuliert, die jeder Einzelposition ihren erwarteten Einzel-Return zum Prognosehorizont zuordnet. Ist

$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,...,\mu_n)'$ der Vektor der erwarteten Einzel-Returns μ_i, so lässt sich $\mu(\mathbf{x})$ darstellen als

$$\mu(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}'\,\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \ . \tag{4}$$

Dabei wird angenommen, dass der Vektor $\boldsymbol{\mu}$ als Inputgröße gegeben ist, indem beispielsweise Schätzgrößen für die erwarteten Einzel-Returns vorliegen.

In der allgemeinen Form lässt sich das Optimierungsproblem (P) wie folgt formulieren [UrPa99, S. 10]:

(P1) (5)
Maximiere: $\mu(\mathbf{x})$
Unter den Nebenbedingungen:

(i) $\mathrm{CVaR}_\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{1-\beta} \int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y})>\mathrm{VaR}_\beta(\mathbf{x})} f(\mathbf{x},\mathbf{y})p(\mathbf{y})d\mathbf{y} \quad \leq \quad \omega,$

(ii) $\mathbf{x} \quad \in \quad X.$

Dabei bezeichnet ω die Obergrenze für das Risikopotenzial und X die Menge der zulässigen Portfolios. Generell ist vorauszusetzen, dass in die Optimierung nur zulässige Portfolios einbezogen werden, die durch die Menge X vorgegeben werden. Wird diese nur durch lineare Nebenbedingungen gebildet, die sich beispielsweise aus der Vorgabe von Volumenunter- und -obergrenzen für die einzelnen Portfolio-Komponenten ergeben, dann stellt X eine konvexe Menge, genauer ein konvexes Polyeder, dar [z. B. Kall76, S. 28]. Die Voraussetzung ist wichtig dafür, dass das Optimierungsproblem lösbar ist und wird im Folgenden als gültig angenommen.

Schritt 2: Vereinfachung des Optimierungsproblems mit einer Hilfsfunktion

Zur Lösung der Optimierungsaufgabe wird das Optimierungsproblem schrittweise vereinfacht. Dazu wird die folgende Hilfsfunktion $F_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ verwendet:

$$F_\beta(\mathbf{x},\alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta} \int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y})>\alpha} (f(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \alpha)p(\mathbf{y})d\mathbf{y} \ . \tag{6}$$

Dabei ist α eine beliebige reelle Zahl. Der Integrand wird nur für positive Differenzen betrachtet, das heißt, wenn $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ größer ist als α. Für die Funktion $F_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ lassen sich die folgenden Zusammenhänge zeigen [Urya00, S. 2]:

(1) $F_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ ist konvex in α.

(2) Der Value at Risk $\mathrm{VaR}_\beta(\mathbf{x})$ ist Minimumstelle von $F_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ in α.

(3) Eine Minimierung von $F_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ nach α liefert den Wert $CVaR_\beta(\mathbf{x})$.

Daher gilt:

$$CVaR_\beta(\mathbf{x}) = \min_\alpha F_\beta(\mathbf{x},\alpha) = F_\beta(\mathbf{x}, VaR_\beta(\mathbf{x})) \ . \tag{7}$$

Das heißt, dass man den CVaR eines Portfolios **x** berechnen kann, indem man die Funktion $F_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ über alle reellen Zahlen α minimiert. Der Wert der Funktion ist im Optimum gleich dem CVaR, und dieses Optimum wird an der Stelle des VaR des Portfolios **x** zum selben Konfidenz-Niveau angenommen. Die Lösbarkeit der Minimierung ist dadurch sichergestellt, dass die Funktion $F_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ konvex sowohl in α als auch in **x** ist, wenn die Verlustfunktion $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ konvex ist. Dies ist hier der Fall, da $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ als lineare und damit auch als eine konvexe Funktion definiert wurde.

Minimiert man nun die Funktion $F_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ über alle $\alpha \in \Re$ und gleichzeitig über alle zulässigen Portfoliopositionen **x**, so erhält man ein Portfolio $\mathbf{x}^*$ mit minimalem CVaR und gleichzeitig als Wert α^* den zugehörigen Value at Risk [Urya00, S. 3]:

$$\min_{\mathbf{x}\in X} CVaR_\beta(\mathbf{x}) = \min_{(\mathbf{x},\alpha)\in X\times\Re} F_\beta(\mathbf{x},\alpha) = F(x^*,\alpha^*) = F_\beta(\mathbf{x}^*, VaR_\beta(\mathbf{x}^*)) \ . \tag{8}$$

Der Vorteil der Funktion $F_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ liegt also darin, *dass nur ein einziger Optimierungsvorgang erforderlich ist, um zu gegebenem Risikoniveau das Portfolio mit dem minimalen CVaR und gleichzeitig den zugehörigen VaR zu ermitteln*. Mit Hilfe der Funktion $F_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ lässt sich das folgende Optimierungsproblem (P2) formulieren:

(P2)

Maximiere: $\mu(\mathbf{x})$ (9)

Unter den Nebenbedingungen:

(i) $F_\beta(\mathbf{x},\alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta} \int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y})>\alpha} (f(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \alpha) p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad \leq \quad \omega,$

(ii) $\mathbf{x} \in X,$

(iii) $\alpha \in \Re.$

Es lässt sich zeigen, dass das Optimierungsproblem (P2) äquivalent zu (P1) ist: Wenn (x^*, α^*) das Optimum von (P2) ist, dann ist x^* optimale Lösung von (P1) und α^* entspricht dem zugehörigen VaR des $(\mu$,CVaR)-optimalen Portfolios.

Schritt 3: Rechnerische Umsetzung des Optimierungsproblems

Da die Dichtefunktion des Marktpreisvektors **y** in der Regel nicht bekannt ist [UrPa99, S. 8 f.], ist es das Ziel des Schritt 3, die Funktion $F_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ durch eine Schätzfunktion darzustellen und eine Lösung des Problems (P2) zu approximieren.

Um dabei die rechnerische Umsetzung zu erleichtern, wird das Problem in ein lineares Optimierungsproblem (P3) überführt.

Zunächst wird die Funktion $F_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ durch einen Schätzer ersetzt, der gleichzeitig den Verzicht auf die Annahme einer analytischen Dichtefunktion der zu Grunde liegenden Portfolioverteilung erlaubt. Voraussetzung dieser Approximation ist, dass eine Stichprobe $\mathbf{y_1},...,\mathbf{y_J}$ vom Umfang J für den Marktpreisvektor $\mathbf{y}$ vorliegt. An dieser Stelle geht die im Kapitel 1 getroffene Modularisierungs-Annahme ein. Auf Basis der Zufallsstichprobe lässt sich die Funktion $F_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ relativ einfach durch eine Summenfunktion $\tilde{F}_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ approximieren. Aus den J Stichprobenwerten werden zunächst die zugehörigen Verlustrealisationen $f(\mathbf{x},\mathbf{y_1}),...,f(\mathbf{x},\mathbf{y_J})$ berechnet. Die Summenfunktion $\tilde{F}_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ wird wie folgt definiert:

$$\tilde{F}_\beta(\mathbf{x},\alpha) = \alpha + \frac{1}{J(1-\beta)}\sum_{j=1}^{J}(f(\mathbf{x},\mathbf{y}_j)-\alpha)^+ \ . \tag{10}$$

Dabei bedeutet $b^+=\max\{0;b\}$. $\tilde{F}_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ entspricht der Summe aus α und dem gewichteten Durchschnitt der Verlustrealisierungen „jenseits" des Wertes α, das heißt, aller positiven Differenzen $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ minus α. Unter Verwendung der Näherung $\tilde{F}_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ ergibt sich das folgende Optimierungsproblem (P2') als Näherung des Optimierungsproblems (P2):

(P2') (11)

Maximiere: $\mu(\mathbf{x})$

Unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{array}{lrcl} \text{(i)} & \tilde{F}_\beta(\mathbf{x},\alpha) = \alpha + \frac{1}{J(1-\beta)}\sum_{j=1}^{J}(f(\mathbf{x},\mathbf{y}_j)-\alpha)^+ & \le & \omega, \\ \text{(ii)} & \mathbf{x} & \in & X, \\ \text{(iii)} & \alpha & \in & \Re. \end{array}$$

Das Problem (P2') wird nun in ein lineares Optimierungsproblem transformiert, indem die Funktion $\tilde{F}_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ durch ein System linearer Nebenbedingungen ersetzt wird. Dazu werden J Hilfsvariablen $z_1,...,z_J$ definiert:

$$z_j \ge f(\mathbf{x},\mathbf{y}_j)-\alpha, \quad z_j \ge 0, \qquad j = 1,...,J \ . \tag{12}$$

Für die j-te Stichprobenrealisation gilt, dass z_j größer oder gleich dem Ausdruck $f(\mathbf{x},\mathbf{y_j})-\alpha$ und gleichzeitig größer oder gleich 0 ist, also in jedem Fall größer oder gleich dem j-ten Summand $(f(\mathbf{x},\mathbf{y_j})-\alpha)^+$ in dem Schätzer $\tilde{F}_\beta(\mathbf{x},\alpha)$. Daher ergibt sich für die Summe

$$\alpha + \frac{1}{J(1-\beta)} \sum_{j=1}^{J} z_j \,, \tag{13}$$

dass diese stets größer oder gleich dem Schätzer $\tilde{F}_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ ist und für diesen eine obere Schranke bildet:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_\beta(\mathbf{x},\alpha) &= \alpha + \frac{1}{J(1-\beta)} \sum_{j=1}^{J} (f(\mathbf{x},\mathbf{y}_j) - \alpha)^+ \\ &\leq \alpha + \frac{1}{J(1-\beta)} \sum_{j=1}^{J} z_j \,. \end{aligned} \tag{14}$$

Unter Verwendung der Hilfsvariablen z_j, j=1,...,J lässt sich damit das folgende Optimierungsproblem (P3) formulieren, dessen Lösung auf Grund der vorhergehenden Überlegungen auch Lösung von (P2') ist:

(P3)

Maximiere $\mu(\mathbf{x})$ (15)

Unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{array}{lrcl} \text{(i)} & \alpha + \frac{1}{(1-\beta)} \cdot \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} z_j & \leq & \omega, \\ \text{(ii)} & f(\mathbf{x},\mathbf{y}_j) - \alpha & \leq & z_j, \quad j = 1,\ldots,J, \\ \text{(iii)} & -z_j & \leq & 0, \quad j = 1,\ldots,J, \\ \text{(iv)} & \mathbf{x} & \in & X, \\ \text{(v)} & \alpha & \in & \Re. \end{array}$$

Dieses Optimierungsproblem besteht nur aus linearen Nebenbedingungen und einer linearen Zielfunktion, stellt also insgesamt ein lineares Optimierungsproblem dar.

3 Lösung des Optimierungsproblems

3. 1 Lösungsverfahren für das Optimierungsproblem

Lineare Programme lassen sich mit dem *Simplex-Algorithmus* lösen, der auf der Grundidee beruht, dass das Optimum auch in einer Ecke des Polyeders der zulässigen Lösungen angenommen wird [z. B. Kall76]. Im Simplex-Verfahren wird eine Folge zulässiger Basislösungen, das heißt, Ecken des Polyeders X, betrachtet. Es wird geprüft, ob sich der Wert der Zielfunktion beim Übergang von einer Ecke zu einer benachbarten verbessern lässt. Sofern das Optimierungsproblem lösbar und die Zielfunktion über der Menge der zulässigen Punkte beschränkt ist, terminiert das Verfahren, wenn der Wert in keiner anderen Basislösung mehr verbessert werden kann. Dann ist das Optimum erreicht.

Das hier vorliegende Optimierungsproblem der Form (P3) weist die folgende Struktur auf: Es besteht aus

- n Entscheidungsvariablen für ein Portfolio aus n Einzelpositionen,
- einer Nebenbedingung für die Verlustrisiko-Begrenzung,
- J Hilfsvariablen z_j, j=1,...,J,
- 2J Nebenbedingungen für die Hilfsvariablen z_j, j=1,...,J,
- einer freien Variable α,
- weiteren Nebenbedingungen für die Volumenrestriktionen $\mathbf{x} \in X$; wird beispielsweise für jede Komponente eine Ober- und eine Untergrenze formuliert, so kommen 2n Nebenbedingungen hinzu.

In diesem Fall besteht das Optimierungsproblem somit aus insgesamt n Entscheidungsvariablen, J+1 freien Variablen und 1+2J+2n Nebenbedingungen. Die Struktur des Optimierungsproblems hängt damit im Wesentlichen vom Stichprobenumfang J der Szenariosimulation und von der Anzahl der Portfoliokomponenten n ab. Uryasev wählt in verschiedenen Untersuchungen einen Stichprobenumfang von 20.000 Szenarien und zeigt, dass sich die optimale Lösung mit wenig Rechenaufwand berechnen lässt [Urya00]. So benötigt ein Problem der Form (P3) mit 1.000 Portfoliopositionen und 20.000 Szenariosimulationen unter Anwendung des CPLEX LP Solver auf einem 300 MHz PC weniger als eine Minute Rechenzeit.

3.2 Risk-/Return-Kennzahlen für das optimale Portfolio

a) Risk-/Return-Kennzahlen auf Portfolioebene

Das Optimierungsproblem (P3) liefert eine optimale Lösung $\mathbf{x}^*=(x_1^*,...,x_n^*)'$. Das bedeutet, dass das Portfolio $\mathbf{x}^*$ den erwarteten Portfolio-Return maximiert, dabei die Risiko-Nebenbedingungen einhält und dass $\mathbf{x}^*$ im zulässigen Bereich $\mathbf{x}^* \in X$ liegt. $\mathbf{x}^*$ stellt eine Approximation des (μ,CVaR)-optimalen Portfolios des Ausgangsproblems (P1) dar. Für das Portfolio $\mathbf{x}^*$ lassen sich die folgenden Risk-/Return-Kennzahlen schätzen:

Erwarteter Return ($\mathbf{x}^*$)	$= \mu(\mathbf{x}^*) = \mu'\mathbf{x}^* = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i^*$
$\mathrm{CVaR}_\beta(\mathbf{x}^*)$	$\approx \alpha^* + \frac{1}{(1-\beta)} \cdot \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} z_j^*$
RORAC($\mathbf{x}^*$)	$= \frac{\mu\,(\mathbf{x}^*)}{\mathrm{CVaR}\,(\mathbf{x}^*)} \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i^*}{\alpha^* + \frac{1}{(1-\beta)} \cdot \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} z_j^*}$

Tabelle 1: Risk-/Return-Kennzahlen des Risk-/Return-optimalen Portfolios

b) Risk-/Return-Kennzahlen auf Ebene der Einzelpositionen

Weiterhin lassen sich aus dem optimalen Gesamt-Portfolio Risk/Return-Kennzahlen der einzelnen Komponenten berechnen. Der erwartete Return der i-ten Portfolioposition entspricht dem i-ten Summand des Portfolio-Return und ist gleich $\mu_i x_i^*$. Problematischer ist die Berechnung des Risikobeitrags der i-ten Portfolioposition. Die Schwierigkeit liegt darin, den Einzelpositionen Portfolio-Diversifikationseffekte verursachungsgerecht zuzurechnen. Der Risikobeitrag der Einzelposition muss den Anteil aller Portfolioeffekte berücksichtigen, der auf die jeweilige Einzelposition zurückzuführen ist. Da sämtliche Risikobeiträge zur Verlustrisikodeckung mit Risikokapital zu unterlegen sind, ist die Problematik Berechnung der Risikobeiträge gleichbedeutend mit der Frage der Allokation von Risikokapital auf die Einzelpositionen. Es ist folglich ein Allokationsverfahren für das ökonomische Kapital festzulegen, das eine risikoadjustierte Kapitalallokation im Gesamt-Portfolio sicherstellt.

Sowohl [Tasc99, S. 9 ff.] als auch [DeDe00] zeigen, dass nur eine Kapitalallokation nach dem Euler-Prinzip zu einer risikoadjustierten und effizienten Kapitalallokation im Gesamt-Portfolio führt. Das Euler-Prinzip beruht auf der *Eulerschen Relation*, einem allgemeinen analytischen Zusammenhang homogener Funktionen, deren partielle Ableitungen existieren. Im Folgenden wird das Euler-Prinzip auf ein homogenes Risikomaß $\rho(\mathbf{x})$ vom Grad 1 angewendet und lautet:

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \rho(\mathbf{x})}{\partial x_i} \cdot x_i \,. \tag{16}$$

Die Voraussetzung der Homogenität des Risikomaßes vom Grad eins besagt dabei, dass sich, wenn die Position $\mathbf{x}$ um t vervielfacht wird, auch deren Risiko um t vergrößern muss. Aus der Gleichung (16) geht hervor, *dass sich das Gesamtrisiko eines Portfolios als Summe der Einzelrisiken darstellen lässt. Die einzelnen Summanden sind gerade die Risikobeiträge der Einzelpositionen, die sich aus den Einzelvolumina, gewichtet mit den Ableitungen des Portfolio-Risikos nach der jeweiligen Portfolio-Komponente ergeben.* Eine wichtige Eigenschaft des Euler-Prinzips liegt damit darin, dass es eine additive Aufteilung des Gesamtrisikos auf die einzelnen Portfolio-Komponenten ermöglicht und dabei alle auftretenden Portfolio-Effekte berücksichtigt. Weiterhin zeigt Gleichung (16), dass *die Risikobeiträge der Einzelpositionen von der Zusammenseztung des Portfolios abhängen*. Verändert sich der Portfoliovektor $\mathbf{x}$, so ergeben sich auch neue Risikobeiträge der Einzelpositionen.

Es lässt sich zeigen, dass das Risikomaß des CVaR die Voraussetzungen für eine Anwendung des Eulerprinzips erfüllt [Tasc99]. Die partielle Ableitung des CVaR nach der i-ten Komponente berechnet sich als Abweichung des bedingten Erwartungswerts der i-ten Komponente vom Erwartungswert der i-ten Komponente:

$$\frac{\partial \mathrm{CVaR}_\beta(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \mathrm{E}[y_i] - \mathrm{E}[y_i \mid f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq \mathrm{VaR}_\beta(\mathbf{x})]. \tag{17}$$

Der Ausdruck $\mathrm{E}[y_i]$ kann als Durchschnitt aller Stichprobenwerte der i-ten Komponente, der bedingte Erwartungswert $\mathrm{E}[y_i|f(\mathbf{x},\mathbf{y})\geq \mathrm{VaR}_\beta(\mathbf{x})]$ als Durchschnitt der Stichprobenwerte der i-ten Komponente im Verteilungsende geschätzt werden. Der CVaR besitzt damit die weitere wünschenswerte Eigenschaft, dass sich die partiellen Ableitungen aus der als Input gegebenen Stichprobe $\mathbf{y_1},..,\mathbf{y_J}$ einfach schätzen lassen.

Insgesamt lassen sich damit die folgenden Risk-/Return-Kennzahlen für die i-te Portfolio-Komponente berechnen:

Erwarteter Return (x_i^*)	$= \mu_i x_i^*$
Risikobeitrag (x_i^*)	$= \frac{\partial \mathrm{CVar}_\beta(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} \cdot x_i^* = \{\mathrm{E}[y_i] - \mathrm{E}[y_i \mid f(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) \geq \mathrm{VaR}_\beta(\mathbf{x}^*)]\} \cdot x_i^*$
RORAC (x_i^*)	$= \frac{\mu_i x_i^*}{\frac{\partial \mathrm{CVaR}_\beta(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} \cdot x_i^*} = \frac{\mu_i}{\mathrm{E}[y_i] - \mathrm{E}[y_i \mid f(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) \geq \mathrm{VaR}_\beta(\mathbf{x}^*)]}$

Tabelle 2: Risk-/Return-Kennzahlen der i-ten Position des optimalen Portfolios

Betrachtet man ein Gesamtbank-Portfolio, so können die Risk-/Return-Kennzahlen der Profit Center auf einfache Weise berechnet werden, indem die Erfolgs- bzw. Risikobeiträge der zu einem Profit Center gehörenden Einzelpositionen addiert werden. Das Risk-/Return-Grundmodell liefert insofern einfache Algorithmen zur Berechnung konsistenter Risk-/Return-Planvorgaben für die Profit Center, die optimale Risk-/Return-Strukturen auf allen Steuerungsebenen sicherstellen und sich zum Gesamtbank-Planportfolio aggregieren lassen. Insbesondere entstehen durch die Anwendung des Euler-Prinzips Risikokapital-Beträge, die sich zum Gesamtrisikokapital addieren lassen und dabei sämtlichen Portfolio-Effekten Rechnung tragen.

4 Anwendung des RRS-Grundmodells auf das Gesamtbank-Portfolio

Im Folgenden werden Aspekte der Anwendung des RRS-Grundmodells auf ein Gesamtbank-Portfolio skizziert, die in [Thei01] ausführlich dargestellt werden. Zunächst werden elementare Modellannahmen und anschließend

Einsatzmöglichkeiten für eine Anwendung des RRS-Grundmodells in der Gesamtbank-Steuerung aufgezeigt.

4.1 Modellannahmen für die Anwendung des RRS-Grundmodells auf das Gesamtbank-Portfolio

Das Gesamtbank-Portfolio wird als Vektor der Nominalvolumina der Einzelgeschäfte abgebildet, die nach verschiedenen Merkmalen aggregiert werden, die zur Ergebnis- und Risikobewertung notwendig sind, beispielweise nach Restlaufzeiten, Währungsarten, Rating-Klassen und nach der Profit Center-Zugehörigkeit. Dabei ist letztere für die Aggregation der Risk-/ Return-Kennzahlen auf Profit Center-Ebene erforderlich. Als Entscheidungsvariable eines Optimierungsmodells für das Gesamtbank-Portfolio wird das Neugeschäft des betrachteten Prognosezeitraumes modelliert. Für das Neugeschäft können dabei sowohl positive als auch negative Werte zugelassen werden, d. h., dass Geschäftszuwachs und -abschmelzung berücksichtigt werden.

Das *Bankergebnis* wird durch verschiedene Größen beeinflusst. Einerseits sind die erwarteten Margen, das heißt, die erwarteten Deckungsbeiträge, andererseits die erwarteten Wertveränderungen zu berücksichtigen. Die Return-Funktion ließe sich beispielsweise wie folgt definieren:

> *„Maximiere die Summe der Marktwertänderungen des gesamten Portfolios und der erwarteten Ergebnisbeiträge des Neugeschäfts."*

Jede Einzelgeschäftsart wird hinsichtlich ihrer Wertveränderungen auf Grund sowohl der Marktpreis- als auch der Bonitätsveränderungen isoliert berücksichtigt. Dies kann dadurch erreicht werden, dass jede Einzelgeschäftsart doppelt dargestellt wird, nämlich jeweils einmal pro betrachteter Risikoart. Der Portfolio-Vektor der Gesamtbank verdoppelt sich dadurch gegenüber seiner ursprünglichen Länge. Damit erhalten der Entscheidungsvektor **x** und der Marktpreisvektor **y** die folgende Gestalt:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \\ x_{n+1} = x_1 \\ \dots \\ x_{2n} = x_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{Nominalvolumina } x_1,\dots,x_n \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{Nominalvolumina } x_1,\dots,x_n \end{array} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1^{MR} \\ \dots \\ y_n^{MR} \\ y_1^{KR} \\ \dots \\ y_n^{KR} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{Marktrisiko-abhängige Preise} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{Kreditrisiko-abhängige Preise} \end{array}$$

Abbildung 2: Marktpreis- und Kreditrisiko-Komponenten im Gesamtbank-Portfolio-Optimierungsmodell

Damit ergibt sich, dass in der Verlustfunktion f(**x,y**)=E[**y**]'**x**-**y'x** in den ersten n Summanden die Verluste auf Grund von Marktpreisveränderungen, in den zweiten n Summanden die Verluste auf Grund von Bonitätsveränderungen berechnet werden und sich auf diese Weise Marktpreis- und Kreditrisikoeffekte isolieren lassen. Entsprechend ist der Margenvektor $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1,...,\mu_{2n})'$ der Return-Funktion zu modellieren. Gemäß dem Prinzip der Marktzinsmethode sind in den ersten n Komponenten die erwarteten Strukturbeiträge, die der Treasury-Einheit zugerechnet werden, in den zweiten n Komponenten die erwarteten Konditionsbeiträge zu berücksichtigen, die den Profit Centern zugeordnet werden [Schi97, S. 72 ff.; Thei01, S. 153 ff.].

Im RRS-Grundmodell werden aufsichtsrechtliche und interne Verlustrisikorestriktionen und dadurch beide Kapitalressourcen, das ökonomische und das regulatorische Kapital, gleichzeitig berücksichtigt. Dazu sind die Risikobegrenzungsregeln des Grundsatzes I als Nebenbedingungen des Optimierungsmodells abzubilden. Die Eigenkapitalunterlegung der Risikoaktiva kann durch eine lineare Nebenbedingung dargestellt werden. Wird ein internes Modell für die Risikobegrenzung des allgemeinen Marktrisikos verwendet, kommt eine CVaR-Nebenbedingung für das Marktrisiko der Handelsbuchpositionen hinzu. Bei Verwendung des Standardverfahrens ergibt sich eine weitere lineare Nebenbedingung für die Handelsbuch-Positionen. Das allgemeine Marktrisiko, das Kontrahenten- und das spezifisches Risiko werden in der Summe durch die freien Drittrangmittel begrenzt, die durch eine vorgegebene Relation zum freien Kern- und Ergänzungskapital beschränkt werden [Büsc98, S. 1106 ff.].

4.2 Anwendungsmöglichkeiten des RRS-Grundmodells in der Gesamtbanksteuerung

Im Folgenden soll an einem stark vereinfachten Beispiel gezeigt werden, wie das RRS-Grundmodell als Planungsinstrument eingesetzt werden kann, um für das nächstfolgende Geschäftsjahr ein Risk-/Return-optimales Planportfolio zu bestimmen, welches das erwartete Bankergebnis maximiert und dabei die vorhandenen Kapitalressourcen des ökonomischen und des regulatorischen Kapitals bestmöglich nutzt. In [Thei01] wird dazu ein Anwendungsbeispiel betrachtet.

Eine Beispiel-Bank führt vier Kreditpositionen unterschiedlicher Ratings und Korrelationen sowie eine Handelsposition. Die für die Planung zuständige Abteilung erhält von der Geschäftsführung die Aufgabe, ein Risk-/Return-optimales Portfolio für das folgende Geschäftsjahr zu berechnen, das den erwarteten Unternehmenserfolg maximiert und dabei die derzeit verfügbaren Eigenmittel- und Risikokapital-Ressourcen bestmöglich nutzt. Es stehen im Planungszeitraum insgesamt aufsichtsrechtliche Eigenmittel von 32,00 E zur Verfügung, die derzeit nahezu maximal ausgelastet sind. Für den Einsatz des

Risikokapitals zur internen Risikosteuerung sind bislang nicht publizierte stille Reserven verfügbar. Das aktuelle Risikoniveau der internen Risikosteuerung liegt bei 76,19 E. Das interne Risikoniveau könnte bis auf 99,00 E ausgeweitet werden. Der Vorstand der Beispiel-Bank wünscht eine Empfehlung, in welcher Höhe im Planungszeitraum Risikokapital zur Risikosteuerung eingesetzt werden soll, um möglichst hohe Risk-/Return-Relationen und eine Mindest-Risikorentabilität von 14,00% zu erreichen.

Die Planungsabteilung wendet das RRS-Grundmodell zur Berechnung alternativer Risk-/Return-optimaler Planportfolios an, indem sie die Obergrenze ω für das interne Risikoniveau des CVaR variiert. Sie führt Optimierungen im Intervall der CVaR-Risikoniveaus von 60,06 E, das dem Volumen-minimalen Portfolio entspricht, bis 99,40 E, das dem Volumen-maximalen Portfolio entspricht, durch und untersucht die durch die verschiedenen Risikoniveaus entstehenden Effizienzlinien und die RORAC-Relationen in dem Beobachtungsintervall. Um die Auswirkungen der aufsichtsrechtlichen Risiko-Nebenbedingungen sichtbar zu machen, werden die Optimierungen im Fall A ohne, im Fall B mit Berücksichtigung der aufsichtsrechtlichen Risiko-Restriktionen durchgeführt. Es ergeben sich die folgenden Effizienzlinien [vgl. Thei01, S. 217]:

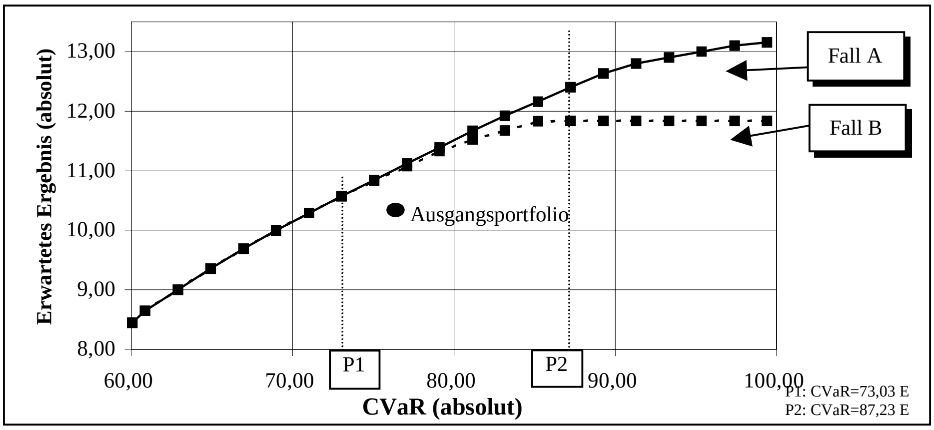

Abbildung 3: Effizienzlinien des Beispielportfolios

Die beiden Effizienzlinien der Optimierungen in den Fällen A und B weisen bis zu dem Punkt P1, der dem Risikoniveau von 73,03 E entspricht, einen identischen Verlauf auf. Rechts dieses Risikoniveaus wird die Eigenmittel-Restriktion wirksam. Auf Grund der zusätzlichen Risiko-Nebenbedingung kommt es im Fall B zu einer Ergebnisreduzierung gegenüber den Optimierungen im Fall A. Ab dem Risikoniveau P2 bleibt die Auslastung der CVaR-Bedingung im Fall B konstant. Das bedeutet, dass das ökonomische Kapital ab dem Punkt P2 auf Grund der aufsichtsrechtlichen Nebenbedingung nicht vollständig genutzt werden kann. Das erwarte Portfolio-Ergebnis bleibt ab dem Risikoniveau P2 konstant, während es im Fall A bis auf 13,15 E am rechten Intervallrand steigt.

Das bedeutet, dass bei der fest vorgegebenen Eigenmittelhöhe das gewählte Risikoniveau der internen Risikosteuerung die maximale Auslastung des ökonomischen und des aufsichtsrechtlichen Kapitals und das maximal erreichbare Ergebnis bestimmt. Wird das interne Risikoniveau zu niedrig festgelegt, wird das regulatorische Kapital nicht vollständig genutzt. Wird es zu hoch gewählt, kann es auf Grund der aufsichtsrechtlichen Risiko-Nebenbedingungen nicht vollständig genutzt werden. Nur im Bereich zwischen den Risikoniveaus P1 und P2 werden beide Kapitalressourcen maximal genutzt.

Zusätzliche Analysen der Risk-/Return-Relationen zeigen, dass die Risk-/Return-Rentabilität des Gesamtbank-Portfolios nicht unbedingt durch eine Erhöhung des eingesetzten Risikokapitals erhöht werden kann. Maximale RORAC-Größen ergeben sich im Bereich interner Risikoniveaus von 68,97 E bis 71,00 E, und die unternehmensweit geforderte Mindest-Risikorentabilität von 14,00% kann im Intervall des minimalen Risikoniveaus von 60,06 E bis zur Höhe einer CVaR-Obergrenze von 83,00 E erreicht werden.

Die Volumen-Entwicklungen und Risk-/Return-Relationen der Einzelpositionen lassen darüber hinaus erkennen, dass die Rangfolge der Risk-/Return-Relationen bezüglich der jeweils knappen Kapitalressource die Zusammensetzung der optimalen Lösung bestimmt. Ist die interne Risiko-Nebenbedingung aktiv, bestimmt die RORAC-Rangordnung der Einzelpositionen die Zusammensetzung der optimalen Portfolios. Ist die aufsichtsrechtliche Risiko-Nebenbedingung aktiv, so beeinflussen zusätzlich die RoE-Rangfolgen der Einzelpositionen die Zusammensetzungen des optimalen Portfolios. Dabei bedeutet RoE der Return on Equity, d. h. den Erfolgsbeitrag je einer Einheit gebundener Eigenmittel.

Auf Grund der Beobachtungen aus den Anwendungen des RRS-Grundmodells liefert die Planungsabteilung dem Vorstand die folgenden Informationen. In dem Bereich interner Risikoniveaus zwischen P1 und P2, d. h. im Intervall einzusetzenden Risikokapitals von 73,03 E und 87,23 E, können beide Ressourcen des regulatorischen und des ökonomischen Kapitals vollständig genutzt werden. Die höchsten Risk-/Return-Relationen ergeben sich im linken Bereich dieses Intervalls. Da eine Reduzierung des derzeitiges Risikoniveaus von 76,19 E mit einem Rückgang des absoluten Ergebnisses verbunden wäre, empfiehlt die Planungsabteilung, das derzeitige Risikoniveau auch im kommenden Geschäftsjahr beizubehalten. Durch die Optimierung der Geschäftsstruktur zu dem aktuellen Risiko-Niveau kann das erwartete Ergebnis gegenüber dem derzeitigen Portfolio von 10,65 E auf 10,96 E gesteigert und insgesamt eine Risk-/Return-Rentabilität von 14,39% erreicht werden, welche die geforderte Mindest-Rentabilität von 14,00% übertrifft. Weiterhin werden als Planvorgaben die Ergebnis-Ziele und die Risikokapital-Limite für die Profit Center ermittelt, indem die Risk-/Return-

Kennzahlen auf Einzelpositions-Ebene entsprechend der Tabelle 2 berechnet und auf Profit Center-Ebene aggregiert werden.

5 Bewertung des RRS-Grundmodells und Fazit

Das dargestellte Grundmodell erlaubt eine Risk-/Return-orientierte Portfolio-Optimierung und kann zu einem Optimierungsmodell für das Gesamtbank-Portfolio erweitert werden. Für das optimale Portfolio lassen sich Risk-/Return-Kennziffern auf Portfolio- und Einzelpositions-Ebene berechnen. Das Optimierungsmodell basiert auf dem Risikomaß des CVaR, einem konvexen und kohärenten Risikomaß. Damit wird die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der (µ,CVaR)-Optimierungsaufgabe gesichert, die in Einklang mit der Erwartungsnutzen-Maximierung eines risikoaversen Investors steht und sich damit aus portfoliotheoretischer Sicht fundieren lässt. Die Kapitalallokation basiert auf dem Euler-Prinzip, wodurch eine risikoadjustierte und Risk-/Return-effiziente Verteilung des Risikokapitals erreicht wird. Aus den Risikobeiträgen der Einzelpositionen lassen sich Risikokapital-Beträge der Teilportfolios bzw. Profit Center durch einfache Addition ermitteln.

Das RRS-Grundmodell hat den Charakter eines EDV-bezogenen Fachkonzepts. Es definiert eine Schnittstelle zwischen der integrierten Risikomessung und -steuerung und löst die Frage der integrierten Risk-/Return-Steuerung unabhängig von den Problemen der integrierten Messung der Markt- und Kreditrisiken. Es stellt aus rechnerischer Sicht keine weiteren Anforderungen an die Beschaffenheit der Input-Daten und die Abbildung der betrachteten Geschäftsarten. Einzige Voraussetzung ist jedoch, dass für jede betrachtete Einzelposition Marktpreise ermittelbar sein müssen. Dadurch wird eine wesentliche Schwierigkeit der praktischen Anwendung des RRS-Verfahrens, die Beschaffung der Input-Daten, nicht gelöst. Es ergibt sich jedoch der Vorteil, dass das RRS-Verfahren in der Praxis unabhängig von den jeweils implementierten Risikomessverfahren umgesetzt werden kann.

Das RRS-Verfahren wird ganz bewusst als Grundmodell bezeichnet. Es weist die Struktur eines völlig neuen Modelltyps auf, dessen spezifische Leistungsfähigkeit anhand von Beispielrechnungen demonstriert wurde. Bevor es im Planungsprozess einer Bank praktisch angewandt werden kann, sind aber noch erhebliche Vorarbeiten zu leisten, insbesondere die Generierung der erforderlichen Input-Daten. Es wird dann die Durchführung verschiedener Gesamtbank-Portfolio-Optimierungen unter alternativen Rahmenbedingungen ermöglichen, auf deren Grundlage sich die berechneten Planportfolios vergleichen und die resultierenden Risk-/Return-Strukturen sowohl auf Gesamtbank- als auch auf Profit Center- und Einzelpositions-Ebene analysieren lassen. Es können Bereiche interner Risikoniveaus festgestellt werden, die maximale Risk-/Return-Relationen im Portfolio bzw. bestmögliche Kapitalausnutzungen des ökonomischen und des regulatorischen Kapitals erlauben. Weiterhin können die Auswirkungen der Eigenmittel-Restriktionen auf die interne Risk-/Return-Steuerung transparent gemacht werden. Das RRS-Verfahren liefert damit fundierte Entscheidungsempfehlungen für eine Risk-/Return-orientierte Gesamtbank-Steuerung.

Literaturverzeichnis

[ArDe99] Artzner, Ph.; Delbaen, F.; Eber, J.-M.; Heath, D., Coherent Measures of Risk, in: Mathematical Finance,Vol. 9, No. 3 (July 1999), S. 203-228.

[Barn00] Barnhill, Theodore; Panagiotis, Papanagiotou; Schumacher, Liliana, Measuring Integrated Market and Credit Risks in Bank Portfolios: An Application to a Set of Hypothetical Banks Operating in South Africa, International Monetary Fund (Hrsg.): IMF Working Paper WP/00/12, December 2000.

[Bert00] Bertsimas, Dimitris; Lauprete, Geoffrey J.; Samarov, Alexander, Shortfall as a risk measure: properties, optimization and applications, Working Paper, Sloan School of Management and Operations Research, Massachusetts Intstitute of Technology, Cambridge, MA, October 2000.

[Büsc98] Büschgen, Hans E., Bankbetriebslehre: Bankgeschäfte und Bankmanagement, 5. Auflage, Wiesbaden 1998.

[CuHi01] Cumming, Christine M.; Hirtle, Beverly J., The Challenges of Risk Management in Diversified Financial Companies, Federal Bank of New York (Hrsg.), Economic Policy Review, March 2001, S. 1-17.

[DeDe00] Delbaen, Freddy; Denault, Michel, Coherent allocation of risk capital, RiskLab, Swiss Federal Institute of Technology, Zürich (Hrsg.), Working Paper, Revision, August 2000.

[Isco99] Iscoe Ian; Kreinin Alex; Rosen, Dan, An Integrated Market and Credit Risk Portfolio Model, Algo Research Quarterly, Vol. 2, No. 3 September 1999, S. 21-38.

[JPMo97] J. P. Morgan - Morgan Guaranty Trust Company, Risk Management Research (Hrsg.): CreditMetrics™ The benchmark for understanding credit risk, New York, April 1997.

[Kall76] Kall, Peter, Mathematische Methoden des Operations Research - Eine Einführung, in: Görtler, H. (Hrsg.), Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik LAMM, Band 27, Stuttgart, 1976.

[Meye99] Meyer, Christoph, Value at Risk für Kreditinstitute: Erfassung des aggregierten Marktrisikopotentials, Wiesbaden 1999.

[Schi97] Schierenbeck, Henner, Ertragsorientiertes Bankmanagement: Band 1: Grundlagen, Marktzinsmethode und Rentabilitäts-Controlling, 5. Auflage, Wiesbaden 1997.

[Tasc99] Tasche, Dirk, Risk Contributions and Performance Measurement, Working Paper, Zentrum Mathematik, Technische Universität München, Juni 1999.

[Tasc00] Tasche, Dirk, Conditional Expectation as Quantile Derivative, Working Paper, Zentrum Mathematik, Technische Universität München, November 2000.

[Thei01] Theiler, Ursula, Integriertes Risk-/Return-Steuerungsverfahren für das Gesamtbank-Portfolio, Wiesbaden, erscheint 2002.

[UrPa99] Uryasev, Stanislav; Palmquist, Jonas; Krokhmal, Pavlo, Portfolio Optimization with Conditional Value at Risk Objective and Constraints, Research Report No. 99-14, Center for Applied Optimization, Department of Industrial and Systems Engineering, University of Florida, Gainesville, November 1999.

[Urya00] Uryasev, Stanislav, Conditional Value at Risk: Optimization Algorithms and Applications, in: Financial Engineering News, Februar 2000, Washington.

Symbolverzeichnis

Symbol	**Bedeutung**
α	Freie Variable im Optimierungsproblem (P2) und (P3),
$E[\mathbf{y}]$	Vektor der Erwartungswerte der Marktpreise,
CVaR	Conditional Value at Risk,
$CVaR_\beta(\mathbf{x})$	CVaR zum Konfidenz-Niveau β,
$f(\mathbf{x},\mathbf{y})$	Verlustfunktion des Portfolios,
$\tilde{F}_\beta(\mathbf{x},\alpha)$	Schätzfunktion für die Funktion $F_\beta(\mathbf{x},\alpha)$,
$F_\beta(\mathbf{x},\alpha)$	Hilfsfunktion für den CVaR,
$\mu(\mathbf{x})$	Return-Funktion des Portfolios,
RORAC	Return on Risk Adjusted Capital, Risiko-Rentabilität,
RoE	Return on Equity, Eigenkapital-Rentabilität,
VaR	Value at Risk,
$VaR_\beta(\mathbf{x})$	Value at Risk zum Konfidenz-Niveau β,
$\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$	Vektor der Entscheidungsvariable,
$\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)$	Vektor der Marktpreise,
$\mathbf{y_1,\ldots,y_J}$	Stichprobe von J Marktpreisvektoren,
$z_1,\ldots,z_J$	Hilfsvariable für das Optimierungsproblem (P3),
ω	Obergrenze für das Risikopotenzial.