Risk-/Return-orientierte Optimierung des Gesamtbank-Portfolios unter Verwendung des Conditional Value at Risk

Ursula-A. Theiler

Risk Training, Carl-Zeiss-Str. 11, D-83052 Bruckmühl

Abstract. In einem sich verschärfenden Wettbewerb sind die Banken gezwungen, Rentabilitäts- und Risikomanagement eng miteinander zu verzahnen und die Risiko-/Ertrags-Struktur des Gesamtbank-Portfolios zu optimieren. In diesem Beitrag wird ein Überblick über ein Optimierungsmodell gegeben, das den erwarteten Gesamtbank-Return maximiert und dabei die Verlustrisiken gleichzeitig aus interner und aus aufsichtrechtlicher Sicht begrenzt und dadurch die zur Verfügung stehenden Kapitalressourcen des ökonomischen und des regulatorischen Kapitals bestmöglich nutzt. Die Optimierung basiert auf einem neuen Ansatz der internen Risikomessung mittels des Conditional Value at Risk, der eine integrierte Betrachtung von Marktpreis- und Kreditrisiken erlaubt, ein konvexes Risikomaß darstellt und die Lösbarkeit der betrachteten Portfolio-Optimierungsaufgabe sichert.

1 Problemstellung

Das Umfeld der Banken ist geprägt durch einen sich verschärfenden Wettbewerb, der zu sinkenden Ergebnismargen im Bankgeschäft führt. Gleichzeitig sehen sich die Banken steigenden Risiken ausgesetzt, die aus einer zunehmenden Komplexität der gehandelten Finanzinstrumente sowie steigenden Volatilitäten und zunehmenden Verflechtungen der Finanzmärkte resultieren. So wird es für die Banken überlebensnotwendig, Rentabilitäts- und Risikomanagement enger miteinander zu verzahnen und das Gesamtbank-Portfolio Risk-/Return-orientiert zu steuern.

Ziel dieses Beitrags ist es, einen Überblick über einen Optimierungsansatz für das Gesamtbank-Portfolio zu geben, der die Risk-/Return-Struktur des Gesamtbank-Portfolios optimiert, indem der erwartete Return des Gesamtbank-Portfolios maximiert wird und dabei die Verlustrisiken gleichzeitig aus interner und aus aufsichtrechtlicher Sicht begrenzt werden. Das Optimierungsmodell hat die folgende Grundstruktur:

(P) Maximierung des erwarteten Gesamtbank-Return (1)
unter den **Nebenbedingungen**
NB 1 Nach internen Verfahren gemessenes Verlustrisiko
$\leq$ Risikotragfähigkeitsgrenze (Ökonomisches Kapital)
NB 2 Kapitalstrukturbegrenzungen für das aufsichtsrechtliche Kapital,
Nach aufsichtsichtrechtlichen Regeln gemessenes Verlustrisiko
$\leq$ Aufsichtsrechtliches Eigenkapital (Grundsatz I-Regeln)
NB 3 Volumenbegrenzungen

2 Grundlegendes Risk-/Return-Optimierungsmodell

Eine Hauptschwierigkeit liegt in der Formulierung der Nebenbedingung NB 1 der Optimierungsaufgabe (P). Gegenstand dieses Kapitels ist daher die Darstellung eines grundlegenden Risk-/Return-Optimierungsmodells, das den erwarteten Gesamtbank-Return maximiert und dabei eine Obergrenze für das interne Verlustrisiko einhält (NB 1) und nur zulässige Portfolios betrachtet (NB 3). Im Kapitel 3 wird skizziert, wie dieses Grundmodell zu einem Optimierungsmodell für das Gesamtbank-Portfolio erweitert werden kann, indem zusätzlich die aufsichtsrechtlichen Kapitalstruktur- und Risikobegrenzungsregeln (NB 2) berücksichtigt werden.

2.1 Festlegung eines Risikomaßes für das Gesamtbank-Portfolio

Zur Risikomessung des Gesamtbank-Portfolios wird ein einseitiges oder Downside-Risikomaß verwendet, welches das Verlustrisiko entsprechend dem betriebswirtschaftlichen Risikobegriff als die *Gefahr der negativen Abweichung des realisierten von einem geplanten Ergebnis* misst (vgl. z. B. [2], S. 865). Eine besondere Klasse der Downside-Risikomaße bilden die quantilsabhängigen Risikomaße; hierzu zählen der Value at Risk, kurz VaR, und der Conditional Value at Risk, kurz CVaR. Während der VaR den Verlust misst, der innerhalb einer bestimmten Haltedauer mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit nicht überschritten wird, gibt der CVaR an, welcher Verlust bei Eintritt dieses Extremfalls, d. h. bei Überschreitung des VaR, zu erwaren ist.

Der CVaR besitzt wünschenswerte Eigenschaften für die Portfoliorisiko-Steuerung. Er stellt ein kohärentes Risikomaß dar. Unter dem Begriff der Kohärenz werden vier Eigenschaften für Risikomaße axiomatisch gefordert, die eine konsistente Risikomessung im Portfolioverbund garantieren [1]. Ein kohärentes Risikomaß erfüllt die Eigenschaften der positiven Homogenität, Subadditivität, Translationsinvarianz und Monotonie und erlaubt eine für die Portfolio-Steuerung entscheidende Risiko-Aggregation verschiedener Teilportfolios über mehrere Hierarchiestufen.

Aus der positiven Homogenität und der Subadditivität des CVaR folgt weiterhin, dass der CVaR ein konvexes Risikomaß bildet. Dies stellt sicher, dass eine Risk-/Return-Optimierung des Portfolios stets lösbar ist, sofern eine konkave Return-Funktion verwendet wird und der zulässige Bereich konvex und nicht leer ist. Weiterhin lässt sich zeigen, dass aus entscheidungstheoretischer Sicht eine Risk-/Return-Optimierung unter Verwendung des CVaR im Einklang mit einer Erwartungsnutzen-Maximierung risikoaverser Investoren, d. h. Anteilseigner der Bank, steht. Insofern liefert diese Optimierungsaufgabe aus betriebswirtschaftlicher Sicht fundierte und aussagekräftige Ergebnisse.

In der Praxis hat sich der Value at Risk weithin als Risikomaß zur Messung der Marktpreis-Risiken etabliert. Dieses Risikomaß liefert konsistente Informationen der Portfoliorisiko-Messung, wenn normalverteilte Portfolio-Returns vorliegen. Falls diese Normalverteilungssnnahme nicht erfüllt ist, geht jedoch die Eigenschaft der Subadditivität des VaR und damit dessen Konvexität und Kohärenz verloren. Daher ist der VaR nicht zur Risikosteuerung des Gesamtbank-Portfolios geeignet, das zum überwiegenden Teil aus Kreditpositionen besteht und dessen Returns keinesfalls als normalverteilt angenommen werden können.

Da der CVaR grundlegende Eignungsmerkmale der Risikosteuerung des Gesamtbank-Portfolios besitzt, wird dieses Risikomaß im Optimierungsmodell zur Abbildung der Nebenbedingung NB 1 der Verlustrisiko-Begrenzung nach internen Regeln verwendet.

Nachfolgend werden wesentliche **Modellannahmen** und **Definitionen** für das Optimierungsmodell erläutert. Ein Portfolio wird als Vektor $\mathbf{x}$ der Nominalvolumina der Einzelpositionen x_i, i=1,...,n, dargestellt, $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)'$. Dabei bedeuten im Folgenden fett gedruckte Buchstaben Vektoren. Zufallsabhängige Größen sind die Marktpreise der einzelnen Positionen zum Prognosehorizont. Jeder Position x_i ist der Marktpreis y_i, i=1,...,n, zugeordnet. Die Marktpreise werden im Vektor $\mathbf{y}=(y_1,...,y_n)'$ zusammengefasst. Der Marktwert des Portfolios $MW_{Portfolio}$ berechnet sich als

$$MW_{Portfolio} = \mathbf{y'x} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \ . \qquad (2)$$

Die Existenz einer Dichtefunktion für den Marktpreisvektor ist dabei keine notwendige Bedingung für die rechnerische Umsetzung des Optimierungsmodells. Vielmehr wird dazu eine gemeinsame Stichprobe der Marktpreis-Realisationen $\mathbf{y_1},..,\mathbf{y_J}$ benötigt (vgl. Gleichung (6) in Kapitel 2.2).

Die **Verlustfunktion** f(**x,y**) misst den *Portfolioverlust als negative Abweichung des realisierten von dem erwarteten Portfoliowert* und wird definiert als

$$f(\mathbf{x,y}) = E[\mathbf{y}]'\mathbf{x} - \mathbf{y'x} = (E[\mathbf{y}] - \mathbf{y})'\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} (E[y_i] - y_i)x_i \ . \qquad (3)$$

Dabei bezeichnet E[**y**] den Erwartungsvektor der Marktpreise zum Prognosehorizont. Im Folgenden wird von einem Konfidenzniveau der Höhe α, z. B. $\alpha = 99\%$, ausgegangen. Der **VaR** und **CVaR** der Verlustfunktion f(**x,y**) zum Konfidenzniveau α, die mit $\mathrm{VaR}_\alpha(\mathbf{x})$ und $\mathrm{CVaR}_\alpha(\mathbf{x})$ bezeichnet werden, lauten dann [5], [7]:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(\mathbf{x}) = \inf\{z \in \Re \mid P((f(\mathbf{x},\mathbf{y})) \le z) \ge \alpha\}\,, \tag{4}$$
$$\mathrm{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}) = E[f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mid f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \ge \mathrm{VaR}_\alpha(\mathbf{x})]\,.$$

Die folgende Abbildung zeigt die Verlustfunktion f(**x,y**) und die zugehörigen Risikomaße VaR und CVaR zum Konfidenzniveau α:

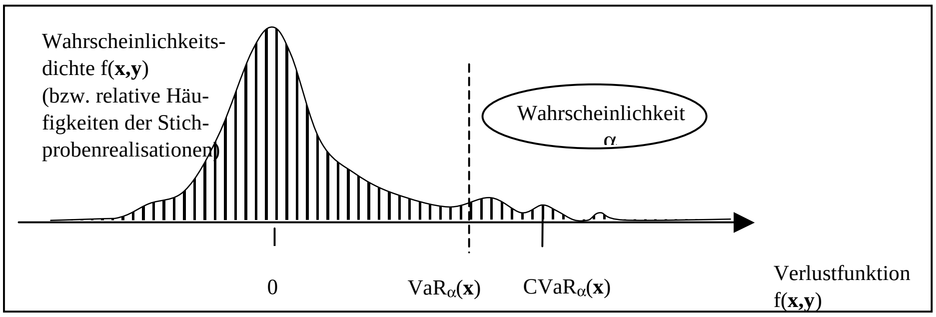

Abbildung 1: Wahrscheinlichkeitsdichte der Verlustfunktion f(**x,y**) und zugehörige Risikomaße VaR und CVaR

2.2 Formulierung des Risk-/Return-Optimierungsmodells

Im Folgenden wird das **grundlegende Risk-/Return-Optimierungsmodell** formuliert [7]. Es lässt sich auf Portfolios mit beliebigen Assets, beispielsweise Aktien-, Options- oder Kreditpositionen, anwenden, d. h. es werden keine Bedingungen an die zu Grunde liegenden Verteilungen der Assel-Returns gestellt. Es basiert auf dem Risikomaß des CVaR. Allgemein lautet die Optimierungsaufgabe:

(P1) Maximiere den erwarteten Portfolio-Return		(5)
Unter den Nebenbedingungen:		
NB 1	CVaR des Portfolios ≤ Verlustrisiko-Obergrenze,	
NB 3	Betrachtung nur zulässiger Portfolios.	

Die CVaR-Nebenbedingung wird sukzessive modifiziert, um das Ausgangsproblem (P1) in ein rechnerisch einfacher zu lösendes Optimierungsproblem zu transformieren: Das Problem (P1) wird in ein äquivalentes Problem überführt, das eine Hilfsfunktion für den CVaR verwendet. Anschließend wird diese Hilfsfunktion für den CVaR durch eine Schätzfunktion approximiert und die CVaR-Nebenbedingung durch ein System linearer Nebenbedingungen ersetzt. Es resultiert das folgende Optimierungsproblem (P2), wobei $\mu(\mathbf{x})$ eine lineare Return-Funktion darstellt.

(P2) Maximiere $\mu(\mathbf{x})$ (6)

Unter den Nebenbedingungen

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{(i)} & q + \frac{1}{(1-\alpha)} \cdot \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} z_j & \leq & Riskap\_max & \\
\text{(ii)} & f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j) - q & \leq & z_j, & j = 1, \ldots, J, \\
\text{(iii)} & -z_j & \leq & 0, & j = 1, \ldots, J, \\
\text{(iv)} & \mathbf{x} & \in & X, & \\
\text{(v)} & q & \in & \Re. &
\end{array}
$$

Das Optimierungsproblem (P2) stellt ein lineares Optimierungsproblem dar, das mittels Simplex-Algorithmus relativ einfach zu lösen ist. Die Nebenbedingungen (i) bis (iii) bilden die CVaR-Nebenbedingung ab, wobei die freie Variable q im Optimum eine Näherung für den Portfolio-VaR liefert. Die Nebenbedingung (iv) legt den zulässigen Bereich fest und entspricht der Bedingung NB 3 in der Gleichung (1) (vgl. [7] sowie [6], S. 117 ff.).

3 Risk-/Return-Optimierungsmodell für das Gesamtbank-Portfolio

Im Folgenden werden wesentliche Aspekte der Erweiterung des grundlegenden Optimierungsansatzes zu einem Optimierungsmodell für das Gesamtbank-Portfolio aufgezeigt ([5], S. 147 ff.). Es werden wesentliche Modellannahmen dargestellt, welche die besonderen Risiko-/Ertrags-Strukturen des Gesamtbank-Portfolios abbilden, und die weiteren Nebenbedingungen zur Begrenzung des Verlustrisikos aus aufsichtsrechtlicher Sicht (NB 2) betrachtet.

Das **Gesamtbank-Portfolio** wird als Vektor der Nominalvolumina der Einzelgeschäfte abgebildet, die nach verschiedenen Merkmalen aggregiert werden, die zur Ergebnis- und Risikobewertung notwendig sind, beispielweise nach Restlaufzeiten, Währungsarten, Ratingklassen und nach der Profit Center-Zugehörigkeit. Dabei ist letztere für die Aggregation der Risk-/Return-Kennzahlen auf Profit Center-Ebene erforderlich. Als **Entscheidungsvariable des Optimierungsmodells** für das Gesamtbank-Portfolio wird das Neugeschäft des betrachteten Prognosezeitraumes modelliert, das sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann und dadurch Geschäftszuwachs und -abschmelzung berücksichtigt.

Es werden die **Wertveränderungen jeder Einzelgeschäftsart** auf Grund von Marktpreis- und Bonitätsveränderungen isoliert erfasst, indem jede Einzelgeschäftsart doppelt dargestellt wird, nämlich jeweils einmal pro betrachteter Risikoart. Der Portfolio-Vektor der Gesamtbank verdoppelt sich dadurch gegenüber seiner ursprünglichen Länge. Damit erhalten der Entscheidungsvektor $\mathbf{x}_{Ges}$ und der Marktpreisvektor $\mathbf{y}_{Ges}$ des Gesamtbank-Portfolios die folgende Gestalt:

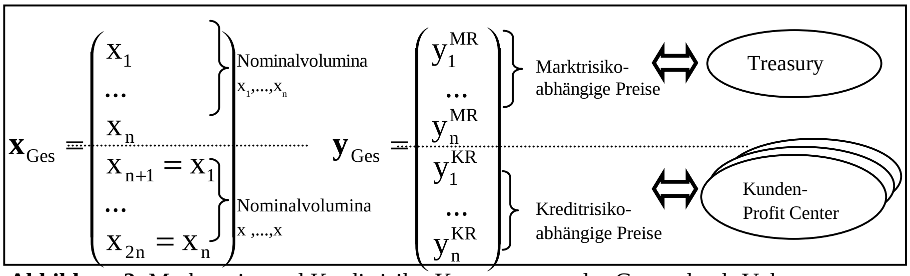

Abbildung 2: Marktpreis- und Kreditrisiko-Komponenten des Gesamtbank-Vektors

Damit werden in der Verlustfunktion f($\mathbf{x}_{Ges}$,$\mathbf{y}_{Ges}$) in den ersten n Summanden die Verluste auf Grund von Marktpreisveränderungen, in den zweiten n Summanden die Verluste auf Grund von Bonitätsveränderungen berechnet.

Entsprechend ist die **Return-Funktion** strukturiert. Gemäß dem Prinzip der Marktzinsmethode werden in den ersten n Komponenten die erwarteten Strukturbeiträge, die der Treasury-Einheit zugerechnet werden, in den zweiten n Komponenten die erwarteten Konditionsbeiträge erfasst, die den Profit Centern zugeordnet werden ([4], S. 72 ff., [5], S. 153 ff.]. Neben den erwarteten Margenbeiträgen sind weiterhin die erwarteten Wertveränderungen des Neugeschäfts zu berücksichtigen, so dass sich die folgende Zielfunktion ergibt:

„Maximiere die Summe der erwarteten Marktwertänderungen und der erwarteten Ergebnisbeiträge des Neugeschäfts.“ (7)

Insgesamt ergibt sich die folgende Erfassung von Risiken und Erträgen im Optimierungsmodell:

Profit Center-Zurechnung	**Risiko (CVaR)**	**Return (Zielfunktion)**	
		Wertveränderungen +	Margenbeitrag
Kunden- Profit Center	Kreditrisiko	Wertveränderungen aufgrund von Bonitätsänderungen	Konditionsbeitrag
Treasury	Marktrisiko	Wertveränderungen aufgrund von Marktpreisänderungen	Strukturbeitrag

Tabelle 1: Erfassung von Risken und Erträgen im Optimierungsmodell

Neben der internen Risikonebenbedingung für den CVaR werden zusätzlich die **aufsichtsrechtlichen Verlustrisiko-Begrenzungsregeln** abgebildet. Unter der Nebenbedingung NB 2 werden die aufsichtsrechtlichen Eigenkapitalstruktur-Regeln, sowie die beiden Risikobegrenzungsregeln des Grundsatzes I für das Ausfallrisiko des Anlagebuchs und für das Marktrisiko des Handelsbuchs zusammengefasst [3]. Die **Eigenkapitalunterlegung der Risikoaktiva** in der ersten Bedingung des Grundsatz I wird durch eine lineare Nebenbedingung dargestellt. Wird zur Begrenzung der **Marktrisiken des Handelsbuchs** ein internes Modell verwendet ([3], §§ 32 ff.), so kommt weitere CVaR-Nebenbedingung als obere Abschätzung des Handelsbuch-VaR hinzu. Beim Einsatz der Standardmethode ergibt sich eine weitere lineare Nebenbedingung für die Handelsbuch-Positionen.

4 Anwendungsbeispiel

Die Wirkungsweise der Risk-/Return-Optimierung des Gesamtbank-Portfolios lässt sich anhand eines Anwendungsbeispiels verdeutlichen (vgl. [5], S. 207 ff.). Es soll das Planportfolio einer Beispiel-Bank festlegt werden. Das aufsichtsrechtliche Eigenkapital ist derzeit nahezu ausgelastet, und im folgenden Geschäftjahr ist keine Kapitalerhöhung möglich. Um zusätzliches Geschäftspotential zu schöpfen, erwägt der Vorstand eine Erhöhung des derzeit eingesetzten ökonomischen Kapitals um 17 Einheiten, kurz mit E bezeichnet. Weiterhin soll im Planjahr ein Mindest-RORAC von 14,00% erreicht werden, der definiert ist als das erwartete Gesamtbank-Ergebnis, dividiert durch den CVaR des Gesamtbank-Portfolios. Für die Unternehmensleitung stellen sich die Fragen: Soll das aktuelle Risikoniveau beibehalten werden (Szenario 1) oder erhöht werden (Szenario 2)? Welche Risk-/Return-Plankennzahlen ergeben sich daraus für das Gesamtbank-Planportfolio?

Zur Lösung des Problems werden verschiedene Optimierungen unter alternativen internen Risikoniveaus, d. h. Obergrenzen für das ökonomische Kapital, durchgeführt. Das derzeitige Ausgangsportfolio wird mit PF 0 bezeichnet.

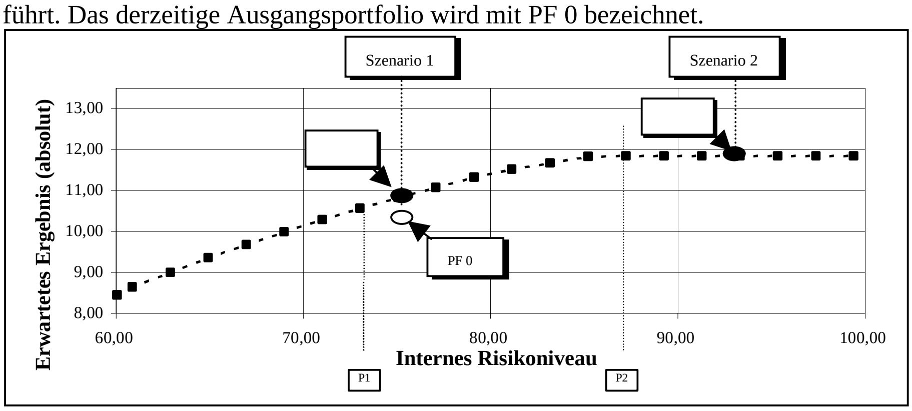

Abbildung 3: Effizienzlinie, Risk-/Return-optimale Portfolios der Beispiel-Bank

Die verschiedenen Optimierungen zur Berechnung der Effizienzlinie der Risk-/ Return-optimalen Planportfolios zeigen, dass links des Risikoniveaus P1 nur die interne Risikonebenbedingung, rechts des Risikoniveaus P2 nur die aufsichtsrechtliche Restriktion aktiv ist. Im Intervall zwischen P1 und P2 sind beide, die interne und die aufsichtsrechtlichen Nebenbedingungen aktiv. Das bedeutet, dass nur in diesem Intervall beide Kapitalressourcen maximal ausgenutzt werden.

Ein Vergleich der optimalen Portfolios PF 1 und PF 2 der betrachteten Szenarien zeigt, dass eine Erhöhung des ökonomischen Kapitals im Szenario 2 zwar zu einem zusätzlichen Ergebnis von 0,88 E bzw. 8,03% gegenüber Szenario 1 führt, dass jedoch der RORAC von 13,57% die geforderte Mindest-Risikorentabilität von 14,00% nicht erreicht und außerdem niedriger ist als derjenige des Portfolios PF 1 (14,39%) und des Ausgangsportfolios PF 0 (13,98%). Weiterhin wird das interne

Risikokapital im Szenario 2 nicht voll ausgelastet. Als Entscheidungsempfehlung für die Jahresplanung ergibt sich daher: Szenario 1 des derzeitigen Risikoniveaus wird befürwortet. Das Risk-/Return-optimale Planportfolio PF 1 führt gegenüber dem aktuellen Portfolio PF 0 bei gleichem Risikoniveau zu einer absoluten Ergebnissteigerung von 0,31 E, zu einem Plan-RORAC von 14,39% und lastet die Ressourcen des ökonomischen und des regulatorischen Kapitals maximal aus.

5 Fazit

Das dargestellte Optimierungsmodell erlaubt eine Risk-/Return-orientierte Portfolio-Optimierung des Gesamtbank-Portfolios. Es basiert auf dem CVaR, einem konvexen und kohärenten Risikomaß, das zur Risikomessung des Gesamtbank-Portfolios geeignet ist. Mit dem Optimierungsmodell lassen sich Portfolio-Optimierungen unter alternativen Rahmenbedingungen durchführen, wobei sowohl aufsichtsrechtliche als auch interne Risikobegrenzungsregeln gleichzeitig eingehalten werden und beide Kapitalressourcen bestmöglich genutzt werden. Das Optimierungsmodell liefert fundierte Entscheidungsempfehlungen für eine Risk-/Return-orientierte Gesamtbank-Steuerung und kann zur Sicherung der Wettbewerbsposition des Unternehmens beitragen.

6 Literaturverzeichnis

[1] Artzner, Ph., Delbaen, F., Eber, J.-M., Heath, D.(1999): Coherent Measures of Risk. In: Mathematical Finance,Vol. 9, No. 3 (July 1999), S. 203-228.

[2] Büschgen, H. (Bankbetriebslehre, 1998): Bankbetriebslehre: Bankgeschäfte und Bankmanagement. 5. Auflage Gabler Wiesbaden.

[3] Bundesaufsichtsamt für das Kreditwesen (1997): Bekanntmachung über die Änderung und Ergänzung der Grundsätze über das Eigenkapital und die Liquidität der Kreditinstitute. Berlin.

[4] Schierenbeck, H. (1997): Ertragsorientiertes Bankmanagement: Band 1: Grundlagen, Marktzinsmethode und Rentabilitäts-Controlling. 5. Auflage Gabler Wiesbaden.

[5] Tasche, D. (1999): Risk Contributions and Performance Measurement. Working Paper. Zentrum Mathematik, Technische Universität München Juni 1999.

[6] Theiler, U. (2001): Integriertes Risk-/Return-Steuerungsverfahren für das Gesamtbank-Portfolio. Gabler Wiesbaden, erscheint 2001.

[7] Uryasev, S., Palmquist, J. Krokhmal, P. (1999): Portfolio Optimization with Conditional Value at Risk Objective and Constraints. Research Report No. 99-14. Center for Applied Optimization, Department of Industrial and Systems Engineering, University of Florida, Gainesville, November 1999.